1. **Fogalmazza meg az $\mathbb{R}$ -beli háromszög-egyenlőtlenségeket!**

$\forall$ x,y$\in\mathbb{R}$ (i) $|x+y|\leq|x|+|y|$
(ii) $|x-y|\geq||x|-|y||$

2. **Mit mond ki a Bernoulli-egyenlőtlenség?**

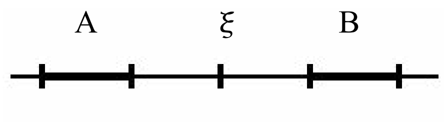
(i) $(1+h)^n\geq 1+n\cdot h$ $(\forall h>-1)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$
(ii) $(1+h)^n\leq 1+2n\cdot h$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $\left(\forall 0\leq h\leq\frac{1}{2n}\right)$

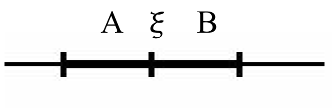
3. **Hogyan szól a számtani és a mértani közép közötti összefüggést kifejező tétel?**

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség egy matematikai tétel, amely szerint ha $a_1\ldots\ldots a_n$ nem negatív valós számok, akkor $\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\leq\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ teljesül, tehát n szám számtani közepe legalább akkora, mint a mértani közepe. Egyenlőség csak akkor lehet, ha $a_1=\ldots=a_n$.

4. **Írja le a szétválasztási axiómát!**

$\forall A,B\subseteq\mathbb{R}$, $(A,B\neq\emptyset)$, ha $\forall a\in A$, $\forall b\in B$: $a\leq b\Rightarrow\exists\xi\in\mathbb{R}$, hogy
$a\leq\xi\leq b$ $\forall a\in A$, $\forall b\in B$.





5. **Mit jelent az, hogy a $H\subset\mathbb{R}$ halmaz induktív?**

$H\subseteq\mathbb{R}$ induktív halmaz, ha $0\in H$ és ha $h\in H\Rightarrow h+1\in H$.

Megjegyzés: Ha $A,B\subseteq\mathbb{R}$, A,B induktív, akkor $A\cup B$, $A\cap B$ halmazok is induktívak.

6. **Hogyan értelmezi a természetes számok halmazát?**

$\mathbb{R}$ összes induktív részhalmazának közös része.

<u>Köv.:</u> $\mathbb{N}$:$\mathbb{R}$ legszűkebb induktív részhalmaza, azaz $H\subseteq\mathbb{R}$ induktív$\Rightarrow\mathbb{N}\subseteq H$.

7. **Fogalmazza meg a teljes indukció elvét!**

Ha valamely, a természetes számok halmazára vonatkozó állítás

(i) teljesül n=0-ra,
(ii) ha feltesszük, hogy teljesül n-re, akkor belátható, hogy teljesül n+1-re is, akkor ez a bizonyos állítás minden természetes számra teljesül.

8. Mikor van egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak maximuma (minimuma)?

Akkor mondjuk, hogy a $A \subseteq \mathbb{R}$ nem üres számhalmaznak van:

minimuma: ha $\exists \alpha \in A$, hogy $\forall x \in A$ számra $\alpha \leq x$.

maximuma: ha $\exists \beta \in A$, hogy $\forall x \in A$ számra $\beta \geq x$.

Ezek jelölésére bevezetjük az $\alpha = \min A$, $\beta = \max A$ jelöléseket.

9. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak nincs minimuma.

$\forall m \in A$ számhoz $\exists a \in A$ szám, melyre $a < m$

10. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak nincs maximuma.

$\forall M \in A$ számhoz $\exists a \in A$ szám, melyre $a > M$

11. Mikor korlátos egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről (alulról)?

Akkor mondjuk, hogy $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ számhalmaz:
(i) felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$ $\forall x \in A$: $x \leq K$.
(ii) alulról korlátos, ha $\exists k \in \mathbb{R}$ $\forall x \in A$: $x \geq k$.

12. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos.

$\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists a \in A$ szám, hogy teljesül $a > K$

13. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \sup A$?

$A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$

$\sup A = \xi \Leftrightarrow$ (i) ξ egy felső korlát: $\forall a \in A$ $a \leq \xi$
(ii) ξ a legkisebb felső korlát: $\forall\ K < \xi$: $\exists a \in A$ $a > K$

14. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \inf A$?

$A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$

$\inf A = \xi \Leftrightarrow$ (i) ξ egy alsó korlát: $\forall a \in A$ $a \geq \xi$
(ii) ξ a legnagyobb alsó korlát: $\forall\ k > \xi$: $\exists a \in A$ $a < k$

15. Mit jelent az, hogy a valós számok halmaza rendelkezik az Archimédeszi-tulajdonsággal?

Minden a és b pozitív valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$.

16. Mondja ki a Cantor-axiómát!

Egymásba skatulyázott, nem üres, zárt intervallumok megszámlálható rendszerének közös része nem üres.

17. Mit jelent az, hogy az A és a B halmaz azonos számosságú?

Ha létezik φ:A→B bijektív leképezés.
$R_\varphi=B$, $D_\varphi=A$.

(Ha létesíthető a két halmaz között bijektív leképezés.)

18. Mit jelent az, hogy az A halmaz véges?

Ha $\exists\ n\in\mathbb{N}$, hogy A és $\mathbb{N}_n$ között bijektív leképezés létesíthető, ahol

$\mathbb{N}_n:=\{k\in\mathbb{N} \mid k<n\}$

($\mathbb{N}_0=\emptyset$,$\mathbb{N}_1=\{0\}$, $\mathbb{N}_2=\{1,2\}\ldots$) A halmaz számossága: $|A|\overset{\text{def}}{=}n$.

19. Mit jelent az, hogy az A halmaz megszámlálhatóan végtelen?

Ha A és $\mathbb{N}$ között bijektív leképezés létesíthető, akkor A megszámlálhatóan végtelen számosságú.

20. Értelmezze két függvény kompozícióját!

Ha f:H→K, g:K→L (H,K,L$\subseteq\mathbb{R}$), akkor g∘f összetett függvény alatt értjük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya H, hozzárendelési utasítása:

$x \mapsto g(f(x))$ $(\forall x\in H)$
($g\circ f$: H→L $(g\circ f)(x):=g(f(x))$)

21. Mit jelent az, hogy egy x:ℕ→ℝ sorozat monoton növekedő?

$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ monoton növekedő, ha
$\forall n\in\mathbb{N} \quad x_n\le x_{n+1}$

22. Mit jelent az, hogy egy x:ℕ→ℝ sorozat nem monoton növekedő?

$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ nem monoton növekedő, ha
$\exists n'\in\mathbb{N} \quad x_{n'}>x_{n'+1}$

23. Mit jelent az, hogy egy x:ℕ→ℝ sorozat korlátos?

$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ korlátos:
$\exists K>0$, hogy $\forall n\in\mathbb{N} \quad |x_n|\le K$

24. Mit jelent az, hogy egy x:ℕ→ℝ sorozat nem korlátos?

$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ nem korlátos:
$\forall K>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad |x_{n_0}|>K$

25. Mit jelent az, hogy egy ν:ℕ→ℕ számsorozat index-sorozat?

ν:ℕ→ℕ indexsorozat, ha $\nu_n < \nu_{n+1}$ $\forall n \in ℕ$

/szigorúan monoton nő/

26. Mit ért egy sorozat részsorozatán?

Ha x:ℕ→ℝ és ν:ℕ→ℕ index-sorozat, akkor
$x \circ \nu = (x_{\nu_n}, n \in ℕ)$ sorozat az x egy részsorozata.

27. Definiálja a konvergens számsorozatot kétféleképpen!

Legyen x:ℕ→ℝ egy valós számsorozat.

a) Ha $\exists \alpha \in ℝ$ szám, úgy, hogy α bármilyen környezete a sorozat majdnem minden elemét tartalmazza, azaz legfeljebb véges sokat nem tartalmaz, akkor azt mondjuk, hogy x konvergens sorozat.

   Logikai jelekkel:

   $\exists \alpha \in ℝ$, $\forall \varepsilon > 0$: $V := \{n | n \in ℕ \quad x_n \notin K_\varepsilon(\alpha)\}$ véges halmaz

b) x konvergens ha $\exists \alpha \in ℝ$, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra
   $\exists N = N(\varepsilon) \in ℕ$, ha n>N akkor $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ $\quad (x_n \in K_\varepsilon(\alpha))$

28. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy x:ℕ→ℝ sorozat nem konvergens!

$\forall \alpha \in ℝ \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N \in ℕ$ $\exists n_0 \in ℕ$, hogy bár $n_0 > N$, mégis $\left| x_{n_0} - \alpha \right| \geq \varepsilon_0$

29. Tegyük fel azt, hogy az A∈ℝ szám minden környezete az x:ℕ→ℝ sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Következik-e ebből az, hogy az x sorozat konvergens? (Válaszát indokolja!)

Nem, mert nem következik, hogy minden környezeten kívül véges sok tagja van a sorozatnak, tehát lehet, hogy valamely környezetén kívül is végtelen sok tag van. Ekkor A torlódási pont és x nem feltétlenül konvergens.

30. Igaz-e az, hogy ha az |x| sorozat konvergens, akkor az x:ℕ→ℝ sorozat is konvergens? (Válaszát indokolja!)

Igen, mert ha **L(x)>0** akkor egy küszöbindextől kezdve a sorozat tagjai pozitívak, tehát $x_n = |x_n| \Rightarrow L(x) = L(|x|)$.

Ha **L(x)<0** akkor egy küszöbindextől kezdve a sorozat tagjai kisebbek mint nulla tehát majdnem minden n-re $|x_n| = -x_n \Rightarrow L(|x|) = -L(x)$.

Ha **L(x)=0**, akkor a nulla tetszőleges kiskörnyezetében végtelen sok tagja van a sorozatnak. Az abszolút érték nem változtat a 0-tól való távolságon, tehát végtelen sok tag marad a tetszőleges kis környezeten belül és véges sok azon kívül $\Rightarrow L(x) = L(|x|) = 0$.

31. Mi a kapcsolat a sorozatok konvergenciája és korlátossága között?

Minden konvergens sorozat korlátos, de nem minden korlátos sorozat konvergens.

32. Milyen tételt ismer „rendőrelv" néven?

$x,y,z:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ számsorozatok és $x_n \le y_n \le z_n$ majdnem minden n-re, és $x\in C$, $z\in C$
$L(x)=L(z) \Rightarrow y\in C$ és $L(y)=L(x)=L(z)$.

33. Mondja ki a határérték monotonitására vonatkozó tételt!

Legyenek $x,y:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatok konvergensek.

1) Ha $x_n \le y_n$ majdnem minden n-re $\Rightarrow L(x) \le L(y)$.
2) $L(x)<L(y) \Rightarrow x_n<y_n$ majdnem minden n-re.

34. Tegyük fel azt, hogy az $x,y:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatokra $\exists n_0\in\mathbb{N}$, hogy $\forall n\ge n_0$ esetén $x_n>y_n$ teljesül. Következik-e ebből az, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$? (Válaszát indokolja!)

Nem, mert ha $L(x)=L(y)$ akkor lehetséges, hogy $x_n>L(x)$ minden $n\in\mathbb{N}$ -re és $y_n<L(y)$ minden $n\in\mathbb{N}$ -re, ekkor $x_n>L(x)=L(y)>y_n$, azaz $x_n>y_n$ majdnem minden $n\in\mathbb{N}$ -re, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

35. Milyen tételt ismer monoton növekvő és korlátos sorozatok konvergenciáját és határértékét illetően?

Minden monoton növő korlátos sorozat konvergens és $L(x)=\sup x$.

36. Hogyan szól a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel?

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

37. Definiálja a Cauchy-sorozatot!

$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat Cauchy-sorozat, ha $\forall\varepsilon>0$ számhoz
$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n,m>N \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon$

38. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot!

$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ konvergens $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, ha $n,m>N$, akkor $|x_n-x_m|<\varepsilon$

39. Mi a definíciója annak a sorozatnak, amelynek a határértékeként kapunk egy a>0 valós szám m-edik ($m\in\mathbb{N}, 1<m$) gyökét?

Legyen $x_0\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges szám $m\in\mathbb{N}$, $m>1 \quad \alpha>0$, ekkor az
$x_n = \frac{1}{m}\left(\frac{\alpha}{x_{n-1}^{m-1}} + (m-1)\,x_{n-1}\right)$ definíciónál adott rekurzív sorozat konvergens, és
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[m]{\alpha}$

40. Mi a definíciója annak, hogy egy valós számsorozat határértéke ∞?

$\forall R \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N=N(R) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n>N$, akkor $x_n>R$

41. Mi a definíciója annak, hogy egy valós számsorozat határértéke -∞?

$\forall R \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N=N(R) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n>N$, akkor $x_n<R$

42. Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a $(q^n, n \in \mathbb{N})$ sorozatról konvergencia szempontjából?

$x:=(q^n, n \in \mathbb{N})$

a) ha $q > 1 \Rightarrow$ x_n tágabb értelemben konvergens és $L(x)=+\infty$.
b) ha $q = 1 \Rightarrow$ $x_n=1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ konstans és $L(x)=1$.
c) ha $|q| <1 \Rightarrow$ x_n konvergens és $L(x)=0$.
d) ha $q \leq -1 \Rightarrow$ x_n divergens.

43. Definiálja az *e* számot!

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e \approx 2,71828....$$

Belátható, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sorozat monoton nő és korlátos, tehát konvergens is.

44. Milyen tételt ismer monoton növő (és nem feltétlenül korlátos) sorozatok konvergenciáját és határértékét illetően?

Egy monoton növő sorozat vagy konvergens és $L(x)= \sup x$ vagy valódi divergens és $L(x)=+\infty$, azaz monoton növő sorozatoknak van határértéke.

45. Mit ért egy sorozat alsó és felső határértéke alatt?

$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $H := \left\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \middle| \exists \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ } ind.\,sor.\,, L(x \circ \nu) = \alpha\right\}$

Felső határérték: $\limsup x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{L}(x) = \max H$

Alsó határérték: $\liminf x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{L}(x) = \min H$

46. Mit ért végtelen sor, illetve annak részletösszeg-sorozata alatt?

Legyen $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ számsorozat, akkor a $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$ formális összeget végtelen sornak, az $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ véges összeget a $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ végtelen sor részletösszeg-sorozatának nevezzük.

47. Fogalmazza meg, mikor nevezünk egy sort konvergensnek, illetve divergensnek?

A $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor konvergens, ha a részletösszeg-sorozata konvergens, divergens, ha a részletösszeg-sorozata divergens és $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_n$.

48. Fogalmazza meg a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot sorokra!

A $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor konvergens $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, ha

m>n>N, akkor $\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| < \varepsilon$

49. Fogalmazza mag a végtelen sorok konvergenciájának egy szükséges feltételét!

A $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor konvergens, akkor $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(Szükséges de nem elégséges feltétel. $x_n\to 0$ ($n\to\infty$) $\not\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergens (pl.: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$)).

50. Mit értünk abszolút konvergens sor alatt? Mi a kapcsolat a konvergens és az abszolút konvergens sorok között?

$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ abszolút konvergens, ha $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ konvergens.

Kapcsolat: $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ abszolút konvergens $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergens.

(pl.: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergens de nem abszolút konvergens!)

51. Mit értünk pozitív tagú soron? Mondja ki az összehasonlító kritériumot!

A $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor pozitív tagú, ha $x_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Összehasonlító kritérium: Legyenek $x,y:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ és $0\leq x_n \leq y_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$:

(i) Ha $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergens, akkor $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ is divergens (Minoráns-kritérium).

(ii) Ha $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ is konvergens (Majoráns-kritérium)

52. Ismertesse a Leibniz-kritériumot! Milyen becslést adhatunk egy konvergens Leibniz-típusú sor konvergencia-sebességére vonatkozóan?

$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x_n$ ($x_n>0$, ($n\in\mathbb{N}$)) (x_n, $n\in\mathbb{N}$) monoton csökken), Leibniz típusú sor akkor és csakis akkor konvergens, ha $x_n \searrow 0$ ($n\to\infty$). Konvergencia-sebességére van becslés: Ha $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x_n$ Leibniz-típusú sor konvergens, és $s=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x_n$, akkor $|S_n - s| \le x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

53. Mondja ki a sorokkal kapcsolatos alapvető műveletek (összeadás, konstanssal való szorzás) definícióját, és a műveletek tulajdonságait!

__Def:__ A $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ végtelen sorok összege alatt a $\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n + y_n)$ végtelen sort értjük. A $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ végtelen sor λ $(\lambda\in\mathbb{R})$ szerese alatt a $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda\cdot x_n$ végtelen sort értjük.

__Tétel:__ Ha $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ végtelen sorok konvergensek, és $\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, $\beta=\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$, és $\lambda\in\mathbb{R}$, akkor a $\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n + y_n)$ és a $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda\cdot x_n$ sorok is konvergensek és $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n + y_n = \alpha+\beta$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda\cdot x_n = \lambda\cdot\alpha$

54. Mondja ki a sorok átrendezhetőségére vonatkozó tételeket!

__Def.:__ $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijektív leképezéseket permutációnak nevezzük.

Legyen $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ az $\mathbb{N}$ egy permutációja, és $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ számsorozat, ekkor a $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ sort a $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor egy átrendezésének nevezzük. Ha egy sor abszolút konvergens, akkor átrendezése is abszolút konvergens, és összegük megegyezik. A nem abszolút konvergens soroknak létezik divergens átrendezése. A feltételesen konvergens soroknak $\forall\mu\in\mathbb{R}$ számhoz létezik átrendezésük, aminek összege μ.

55. Hogyan szól a Cauchy-féle gyök-kritérium?

Adott $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor, ekkor vegyük az $\sqrt[n]{|x_n|}$ sorozat felső határértékét, L:= $\limsup\sqrt[n]{|x_n|}$.

1) Ha $L>1 \Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergens.
2) Ha $L<1 \Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ abszolút konvergens.
3) Ha $L=1 \Rightarrow$ akkor nem tudjuk eldönteni.

56. Ismertesse a Cauchy-féle kondenzációs elvet!

Adott $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor, ahol $x_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ és $(x_n,\ n\in\mathbb{N})$ szigorúan monoton csökken. Ekkor a $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor ekvikonvergens a $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x_{2^n}$ sorral.

<u>**Példa:**</u> $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot\log n}$ *ekvikonvergens* $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ sorral.

57. Hogyan szól a D'Alambert-féle hányados-kritérium?

Adott $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ sor. Tegyük fel, hogy $x_n \neq 0$ $(n\in\mathbb{N})$, és legyen $l := \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{x_n+1}{x_n}\right|$ és legyen $L := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_n+1}{x_n}\right|$

1) Ha $L<1$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ abszolút konvergens.
2) Ha $l>1$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergens.
3) Ha $l\leq 1\leq L$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ -ről nem tudjuk meghatározni a konvergenciáját ezzel a módszerrel.

58. Definiálja két sor Cauchy-szorzatát! Mit tudunk mondani két sor Cauchy-szorzatának összegéről?

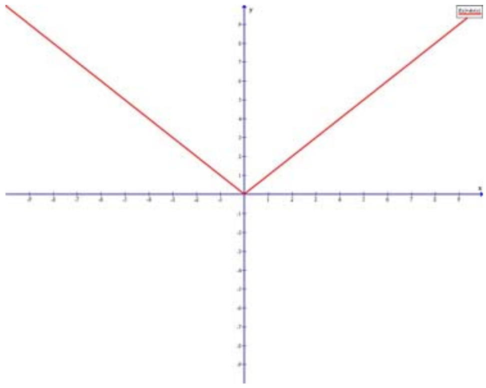
Legyenek $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ végtelen sorok, ekkor a $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ végtelen sort a két sor Cauchy-szorzatának nevezzük. Ha a két sor közül az egyik abszolút konvergens, a másik meg feltételesen (vagy abszolút), akkor a két sor Cauchy-szorzatának az összege megegyezik az összegeik szorzatával:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k \cdot y_{n-k}$$

59. Értelmezze, ábrázolja és jellemezze az abszolútérték-függvényt!

Def.: Abszolútérték függvény.

$x \mapsto |x|$ függvény, ($x\in\mathbb{R}$), ahol $|x| = \begin{cases} x,\ ha\ x \ge 0 \\ -x,\ ha\ x < 0 \end{cases}$



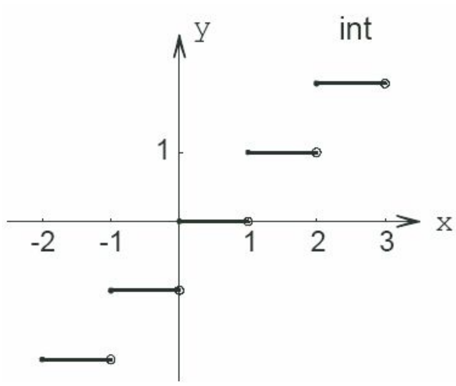
Jellemzés:

- Értelmezési tartomány: $D_f=(-\infty;+\infty)$
- Értékkészlet: $R=[0; +\infty[$
- Menete: 1) $]-\infty;0]$ szig.mon.csökk.
  2) $[0; +\infty[$ szig.mon.nő.
- Paritás: páros
- Zérushely: 0
- Szélsőérték: min.hely:0
  min.érték:0
  max.: -
- Korlátosság: alulról korlátos
  Felülről nem korlátos

1. Értelmezze, ábrázolja és jellemezze az egészrész-függvényt!

Def.: Egészrész függvény.

$x \mapsto [x]$ függvény, ($x\in\mathbb{R}$), ahol $[x]:= k\in\mathbb{R}$, melyre $k \le x \le k+1$



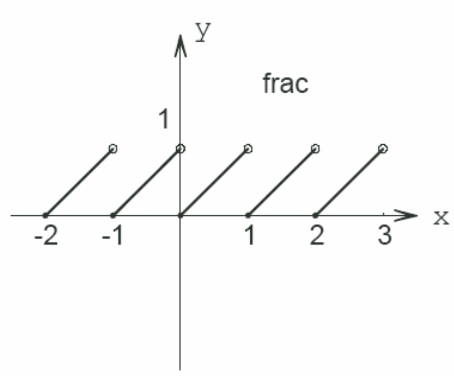
Jellemzés:

- Értelmezési tartomány: $D_f=\mathbb{R}$
- Értékkészlet: $R=\mathbb{Z}$
- Menete: monoton nő
- Paritás: se nem páros se nem páratlan
- Korlátosság: nem korlátos
- Szélsőérték: nincs
- Zérushely: [0,1)

61. Értelmezze, ábrázolja és jellemezze a törtrész-függvényt!

Def.: Törtrész függvény.

$x \mapsto x-[x]$ függvény, ($x \in \mathbb{R}$), ahol $[x]=k$, $k \in \mathbb{Z}$, melyre $k \le x \le k+1$ teljesül.



Jellemzés:

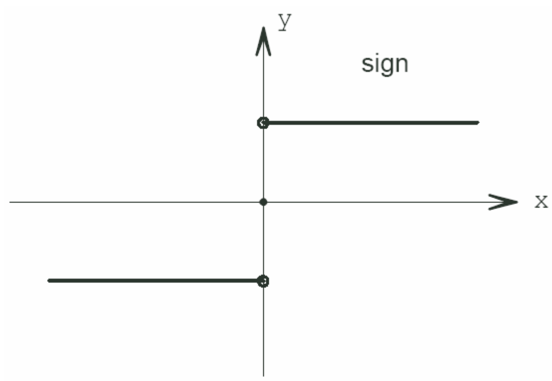
- Értelmezési tartomány: $D_f=\mathbb{R}$
- Értékkészlet: $R=[0,1)$
- Menete: nem monoton, de $[k,(k+1))$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon szigorúan monoton nő
- Paritás: se nem páros se nem páratlan
- Korlátosság: korlátos, inf(frac)=0, sup(frac=1)
- Zérushely: $x-[x]=0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- Szelsőérték: min.hely: $x \in \mathbb{Z}$, min.érték:0

62. Értelmezze, ábrázolja és jellemezze az előjel-függvényt!

Def.: Előjel függvény**.**

Sign: $\mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$

$x \mapsto$ sign(x) függvény, ($x \in \mathbb{R}$), ahol $sign(x)=\begin{cases} 1 & ha \quad x>0 \\ 0 & ha \quad x=0 \\ -1 & ha \quad x<0 \end{cases}$



Jellemzés:

- Értelmezési tartomány: $D_f=\mathbb{R}$
- Értékkészlet: $R=\{-1, 0, 1\}$
- Menete: monoton nő
- Paritás: páratlan
- Korlátosság: korlátos, sup sign=1, inf sign=-1
- Zérushely: x=0
- Szélsőérték: min.hely: $x \in \mathbb{R}$, $x<0$, min.érték:-1
  max.hely: $x \in \mathbb{R}$, $x>0$, max.érték:1

63. Mit jelent az, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$ torlódási pontja az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

Akkor mondjuk, hogy az $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ elem (pont) az $A \subset \mathbb{R}$ számhalmaz torlódás pontja,

1) ha az α pont bármely környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz, azaz $\forall \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(\alpha) \cap H$ végtelen halmaz.
2) ha létezik olyan H-beli nem stacionárius (<u>stacionárius</u>: csak véges sok egymástól különböző tagja van) pontsorozat, melynek határértéke az α pont.

64. Mit értünk polinom és racionális törtfüggvény alatt?

- Legyenek $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ adott számok. A $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ utasítással értelmezett P függvényt polinomnak nevezzük.
- Legyenek P és Q valós együtthatós polinomok, ahol $Q \neq 0$ és jelölje $\Lambda_Q : \{\lambda \in \mathbb{R} \mid Q(\Lambda) = 0\}$ a Q gyökeinek a halmazát. Az $S : \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q \mapsto \mathbb{R} : \quad x \mapsto S(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ utasítással értelmezett S függvényt racionális törtfüggvénynek nevezzük.

65. Fogalmazza meg a torlódási pont fogalmát sorozatok segítségével!

Akkor mondjuk, hogy az $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ elem (pont) az $A \subset \mathbb{R}$ számhalmaz torlódás pontja, ha létezik olyan H-beli nem stacionárius (csak véges sok egymástól különböző tagja van) pontsorozat, melynek határértéke az α pont.

66. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában, hogy az a valós szám nem torlódási pontja az $A \in \mathbb{R}$ halmaznak!

$\alpha \in \mathbb{R}$ α nem torlódási pontja az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak, ha

a) $\forall x_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$ számsorozatra $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \neq \alpha$, vagy ha

b) $\exists \varepsilon_0 > 0 \qquad K_\varepsilon(\alpha) \cap A = \emptyset$

67. Mit jelent az, hogy egy $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz zárt? Írjon példákat!

<u>**Def.**</u>:

1. $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz zárt, ha $\forall \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, $(x_n \in H)$ h-beli konvergens számsorozat határértéke is H-hoz tartozik.
2. $H \subseteq \mathbb{R}$ számhalmaz zárt, ha tartalmazza az összes véges torlódási pontját.

<u>**Példa:**</u>

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$

$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}, \alpha \leq x \leq \beta\}$ számhalmaz zárt.

68. Mit jelent az, hogy egy $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz nyílt? Írjon példákat!

Def.: $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz nyílt, ha $\forall h \in H$-hoz $\exists r > 0$, hogy $K_r(h) \leq H$.

Példa:

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$

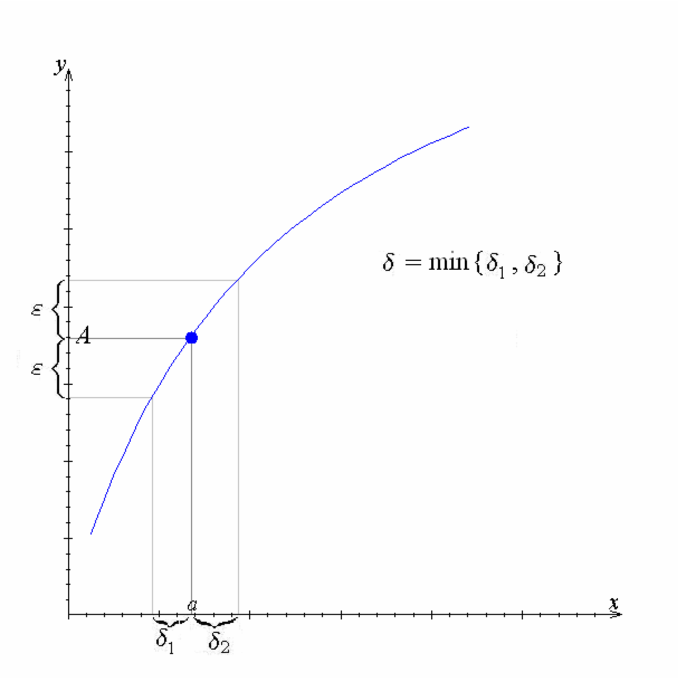
$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}, \alpha < x < \beta\}$ számhalmaz nyílt.

69. Mit jelent az, hogy egy α szám a $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz izolált pontja? Írjon példát!

$H \subset \mathbb{R}$, $H' = \{H \text{ torlódási pontjainak a halmaza}\}$

Ha $\alpha \in H$, de $\alpha \notin H'$, akkor α izolált pontja H halmaznak.

70. Adja meg a végesben vett véges határérték definícióját!

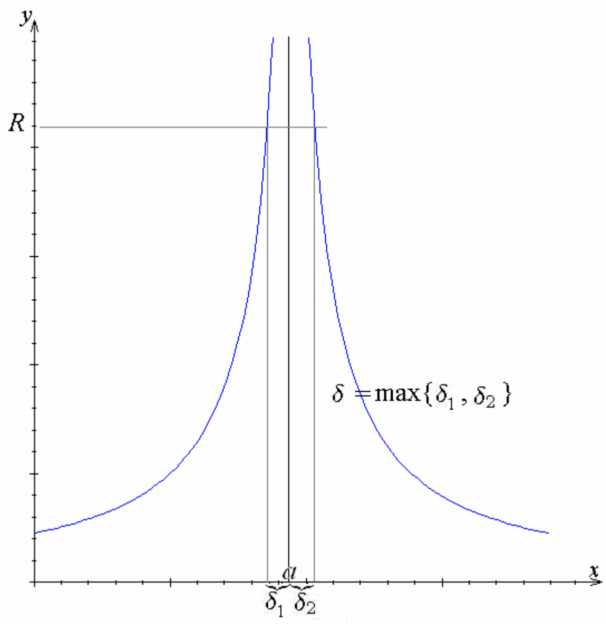


$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = c$, ahol $\alpha, c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in H'$ $f: H \to \mathbb{R}$ $(H \subseteq \mathbb{R})$

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$, ha

$x \in H$ és $0 < |x - \alpha| < \delta$ akkor $|f(x) - c| < \varepsilon$

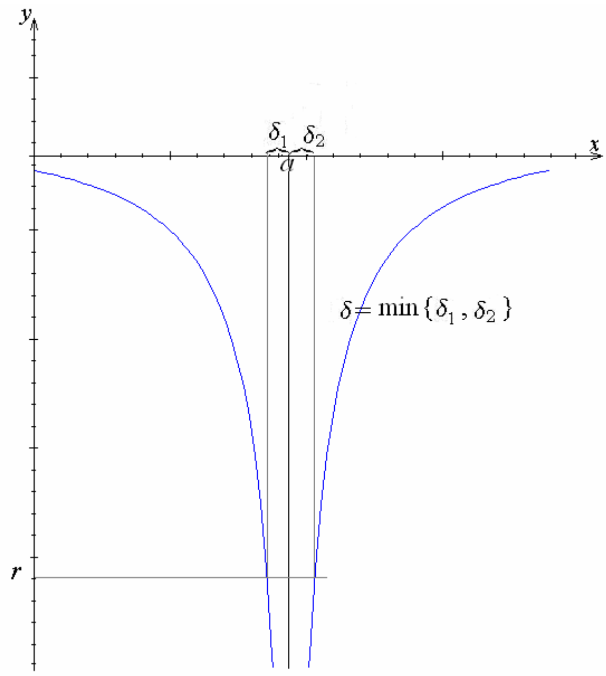
71. Adja meg a végesben vett plusz végtelen határérték definícióját!



$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, ahol $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\in H'$ $f{:}H\to\mathbb{R}$ $(H\subseteq\mathbb{R})$, $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\forall R\in\mathbb{R}$ $\quad\exists\delta = \delta(R,\alpha) > 0$ ha $x\in H$ és $0 < |x-\alpha| < \delta$, akkor $f(x) > R$

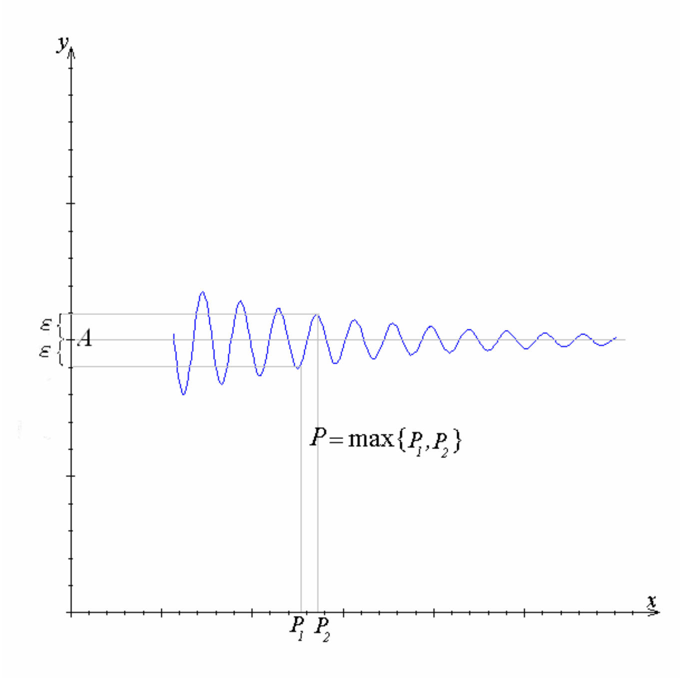
72. Adja meg a végesben vett mínusz végtelen határérték definícióját!



$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, ahol $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\in H'$ $f{:}H\to\mathbb{R}$ $(H\subseteq\mathbb{R})$, $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\forall r\in\mathbb{R}$ $\quad\exists\delta = \delta(r,\alpha) > 0$ ha $x\in H$ és $0 < |x-\alpha| < \delta$, akkor $f(x) < r$

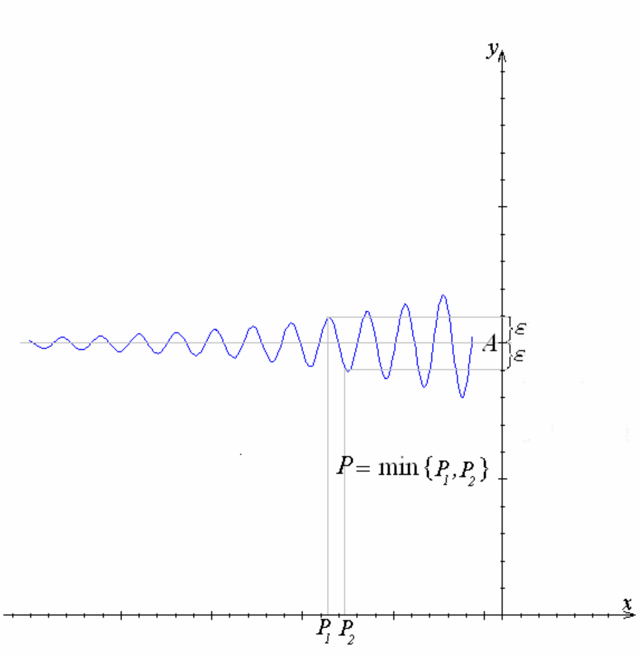
73. Adja meg a plusz végtelenben vett véges határérték definícióját!



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$, ahol f:H→ℝ H⊆ℝ +∞∈H' c∈ℝ, $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\forall\varepsilon>0$ ∃M=M(ε)∈ℝ, ha x∈H és x>M⇒ $|f(x)-c|<\varepsilon$

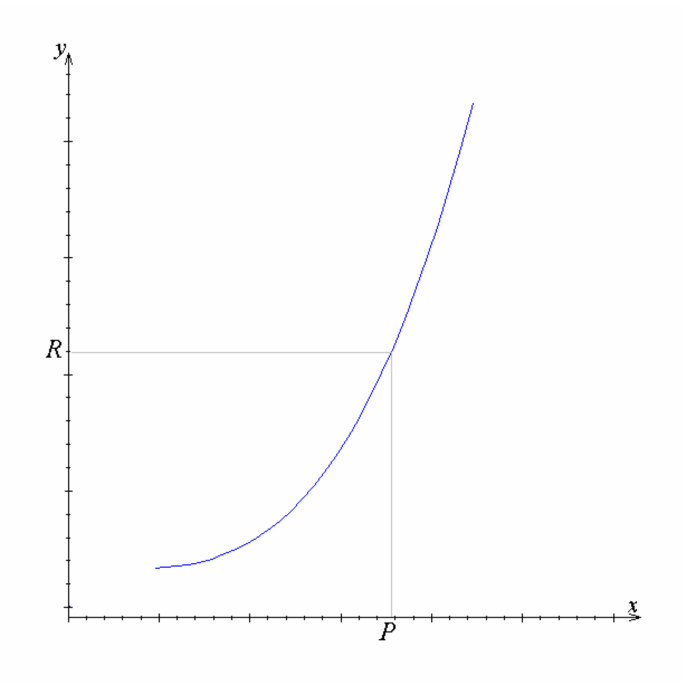
74. Adja meg a mínusz végtelenben vett véges határérték definícióját!



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$, ahol f:H→ℝ H⊆ℝ -∞∈H' c∈ℝ, $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\forall\varepsilon>0$ ∃m=m(ε)∈ℝ, ha x∈H és x<m⇒ $|f(x)-c|<\varepsilon$

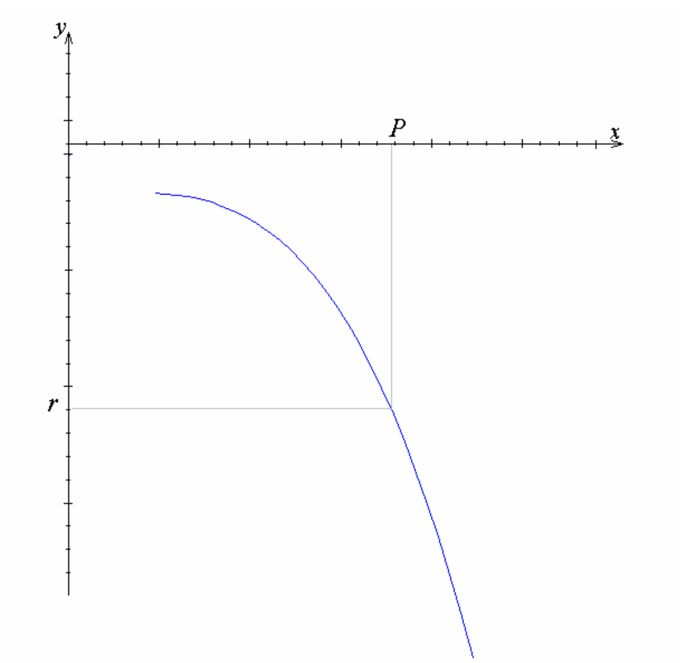
75. Adja meg a plusz végtelenben vett plusz végtelen határérték definícióját!



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ahol f:H→ℝ   H⊆ℝ   +∞∈H', $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

∀R∈ℝ   ∃M=M(R)∈ℝ, ha x∈H és x>M⇒ $f(x) > R$

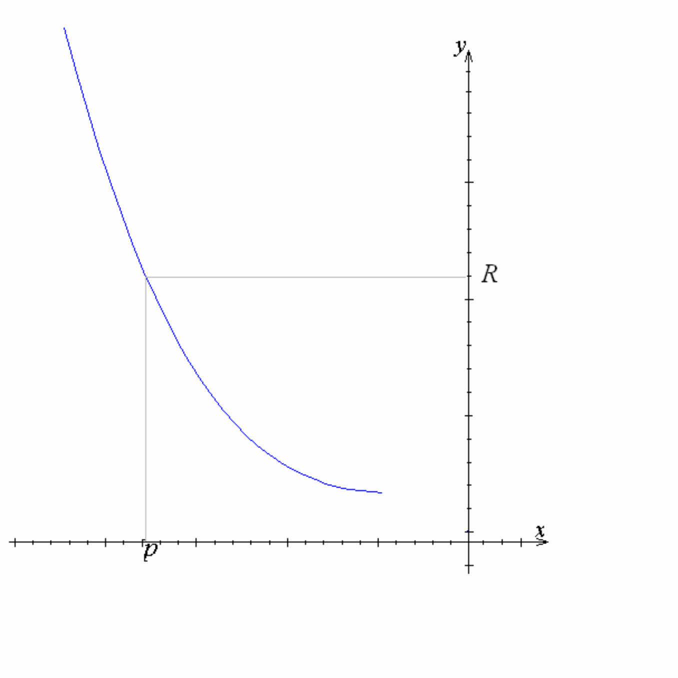
76. Adja meg a plusz végtelenben vett mínusz végtelen határérték definícióját!



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, ahol f:H→ℝ   H⊆ℝ   +∞∈H', $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

∀r∈ℝ   ∃M=M(r)∈ℝ, ha x∈H és x>M⇒ $f(x) < r$

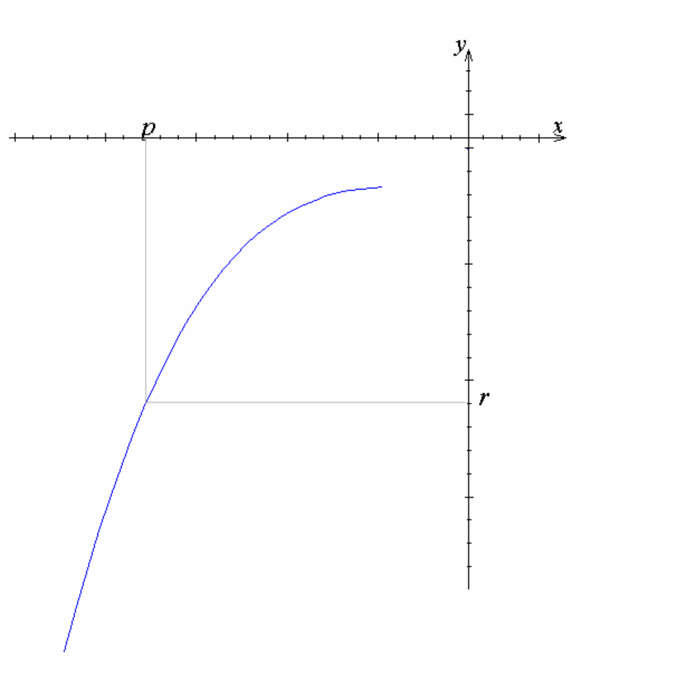
77. Adja meg a mínusz végtelenben vett plusz végtelen határérték definícióját!



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ahol f:H→ℝ H⊆ℝ -∞∈H', $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

∀R∈ℝ ∃m=m(R)∈ℝ, ha x∈H és x<m⇒ $f(x) > R$

78. Adja meg a mínusz végtelenben vett mínusz végtelen határérték definícióját!



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, ahol f:H→ℝ H⊆ℝ -∞∈H', $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

∀r∈ℝ ∃m=m(r)∈ℝ, ha x∈H és x<m⇒ $f(x) < r$

79. Legyen 0 az f valós-valós függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában, hogy az f-nek az 1 nem határértéke a 0 pontban.

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0$ szám esetén $\exists x_0 \in D_f$, hogy $0 < |x_0 - 0| < \delta$, de $\left|f(x_0) - 1\right| \geq \varepsilon_0$

80. Definiálja a valós függvények bal oldali határértékének a fogalmát!

f:H→ℝ $(H \subseteq \mathbb{R})$ $\alpha \in H'$, $(\alpha \in \mathbb{R})$

Legyen $\delta > 0$, és tekintsük a függvény $H_\alpha^- := H \cap (\alpha - \delta, \alpha)$ halmazra való leszűkítését! Ha $\alpha \in \left(H_\alpha^-\right)$ és létezik a leszűkített függvény határértéke az α pontban, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik α pontban a baloldali határértéke.

81. Mondja ki a határértékre vonatkozó átviteli elvet!

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = c \quad \alpha \in H' \quad f: H \to \mathbb{R}, \; c \in \overline{\mathbb{R}}$

$\overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \forall x_n \in D_f$, (n∈ℕ) számsorozatra, melyre

$x_n \neq \alpha$ (n∈ℕ), és $x_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$, igaz, hogy

$f(x_n) \to c \quad (n \to \infty)$.

82. Fogalmazza meg a jobb oldali határértékre vonatkozó átviteli elvet!

$\lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = c \quad f: H \to \mathbb{R}, \quad \alpha \in H', \; c \in \overline{\mathbb{R}}$

$\overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \forall x_n \in D_f$, (n∈ℕ) számsorozatra, melyre

$x_n > \alpha$ (n∈ℕ) és $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$

83. Fogalmazza meg az átviteli elv segítségével, hogy egy valós függvény határértéke az 1-ben 2!

f:H→ℝ $(H \subseteq \mathbb{R})$ $1 \in H'$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \overset{átv.elv}{\Leftrightarrow}$

$\forall x_n \in H$ (n∈ℕ) számsorozat, melyre $x_n \neq 1$ (n∈ℕ), de $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$ teljesül, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 2$

84. Fogalmazza meg az átviteli elv segítségével, hogy egy valós függvény határértéke a +∞-ben -∞!

f:H→ℝ $(H \subseteq \mathbb{R})$ $+\infty \in H'$,

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \overset{átv.elv}{\Leftrightarrow} \forall x_n \in H$ (n∈ℕ) számsorozat, melyre $x_n \to \infty \quad (n \to \infty)$

$\Rightarrow f(x_n) \to -\infty \quad (n \to \infty)$

85. Legyen f:IR→IR. Az átviteli elv segítségével fogalmazza meg, hogy $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$!

f:IR→IR -∞∈IR'

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \overset{átv.elv}{\Leftrightarrow}$ $\forall x_n$∈IR (n∈IN) számsorozatra, melyre $x_n \to -\infty \quad (n\to\infty)$, teljesül, hogy $f(x_n) \to +\infty \quad (n \to \infty)$

86. Írja fel a függvények hányadosának határértékére vonatkozó tételt!

f,g: H→IR α∈H',

ha létezik f-nek és g-nek határértéke az α∈H' pontban, akkor az $\frac{f}{g}$ függvények is létezik határértéke α-ban, és $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}$, feltéve hogy a jobboldalon álló műveletek értelmezettek.

Nincs értelmezve: „$\frac{\infty}{\infty}$", „$\frac{0}{0}$"

87. Mondja ki az összeadás és a határértékképzés kapcsolatát kifejező tételt!

f,g: H→IR (H⊆IR) α∈H',

ha $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)(=A)$ és $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)(=B)$, akkor $\exists \lim\limits_{x\to\alpha}(f+g)(x)$, és $\lim\limits_{x\to\alpha}(f+g)(x) = A+B$, feltéve, hogy a jobb oldalon álló műveletek értelmezettek.

Nincs értelmezve: „$\infty - \infty$"

88. Írja fel a szorzatfüggvény határértékére vonatkozó tételt!

f,g: H→IR (H⊆IR) α∈H',
ha $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)(=A)$ és $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)(=B)$, akkor $\exists \lim\limits_{x\to\alpha}(f\cdot g)(x)$ is, és
$\lim\limits_{x\to\alpha}(f\cdot g)(x) = A\cdot B$, feltéve hogy a jobboldalon álló műveletek értelmezettek.
Nincs értelmezve: „$\infty \cdot 0$"

89. Mit tud mondani a polinomok véges, illetve végtelen helyen vett határértékéről?

Polinomoknak véges helyen vett határértéke megegyezik a behelyettesítési értékkel:
$\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$ (x_0∈IR)
Polinomok $\mp$ végtelenben vett határértéke $\mp\infty$, ha a főegyüttható pozitív, $\pm\infty$, ha a főegyüttható negatív.
$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_n \cdot x^n$ (x∈IR) $a_n \neq 0$:<u>főegyüttható</u>
<u>a_i</u>∈IR $i = \overline{0,n}$:<u>együttható</u>

90. Mit tud mondani a racionális törtfüggvények véges, illetve végtelen helyen vett határértékéről?

Def.: $S(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\Lambda_Q)$ $\Lambda_Q=\{\ \lambda \mid \lambda\in\mathbb{R}\ \ Q(\lambda)=0\ \}$ alakú függvényeket racionális törtfüggvénynek nevezzük, ahol P,Q polinomok.

Határérték:

- **Ha $x_0\notin\mathbb{R}\setminus\Lambda_Q$**, azaz $x_0\in\Lambda_Q$,
  akkor $Q(x_0)=0$, mivel P,Q polinomok, ezért $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)=Q(x_0)=0$

  $\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0}S(x)=$ „$\dfrac{P(x_0)}{0}$" alakú.

  Ha $P(x_0)=0$, akkor sorozattá alakítva a törtet le lehet egyszerűsíteni, ha $P(x_0)\neq 0$ akkor a jobb és baloldali határérték + vagy - ∞, nem feltétlenül megegyező.
- **Ha $x_0\in\mathbb{R}\setminus\Lambda_Q$** $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}S(x)=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
- **+∞-ben vett határérték:** 0, ha deg Q>degP
  $\pm\infty$, ha degP>degQ
  $\dfrac{a_n}{b_n}$, ha degP=degQ és a_n P, b_n pedig Q polinomok főegyütthatója.

91. Írja le a hatványsor definícióját! Mit tudunk mondani a hatványsor konvergencia-tartományáról? Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Hatványsor def.:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x \in \mathbb{R})(a_n \in \mathbb{R})(a_n, n \in \mathbb{N})$$

Konvergencia-tartomány:

$$\alpha := \limsup_{x\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad : \quad R := \begin{cases} 0, \; ha \; \alpha = +\infty \\ +\infty, \; ha \; \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{\alpha}, \; ha \; 0 < \alpha < \infty \end{cases}$$

$K_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \| x - x_0| < R\}$, $ha \; 0 < R < \infty$; $K_\infty(x_0) = \mathbb{R}$; $K_0(x_0) = \{x_0\}$

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ hatványsor abszolút konvergens a $K_R(x_0)$ halmaz pontjaiban, az $\{x \in \mathbb{R} \| x - x_0| > R\}$ halmaz pontjaiban divergens. (Az $\{x \in \mathbb{R} \| x - x_0| = R\}$ halmaz pontjaiban nem tudjuk általában a konvergenciát.)

Összegfüggvény határértéke:

Def.: Tegyük fel hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ hatványsor R konvergencia sugara pozitív. A $K_R(x_0) \ni x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \in \mathbb{R}$ utasítással értelmezett függvényt a hatványsor összegfüggvényének nevezzük.

Tétel: Ha f a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $(x_0 \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{R})(R > 0)$ hatványsor összegfüggvénye, akkor $\forall \alpha \in K_R(x_0)$ pontban $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\alpha - x_0)^n$.

(A hatványsor összegfüggvényének határértéke megegyezik a behelyettesítési értékkel.)

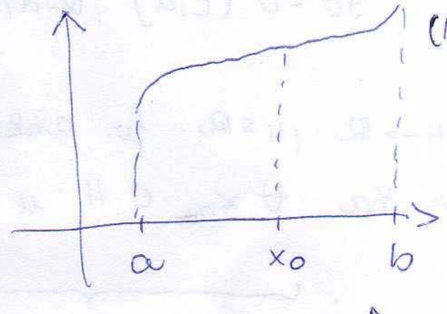
$\boxed{\mathrm{I.}}$

(92)

(*) $\left\{\begin{array}{l} f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}, \ \mathcal{J} \subseteq \mathbb{R} \text{ intervallum} \\ f \text{ monoton nő } \mathcal{J}\text{-n}, \ x_0 \in \mathcal{J}' \end{array}\right. \Rightarrow$ létezik f baloldali határértéke x_0-ban, és

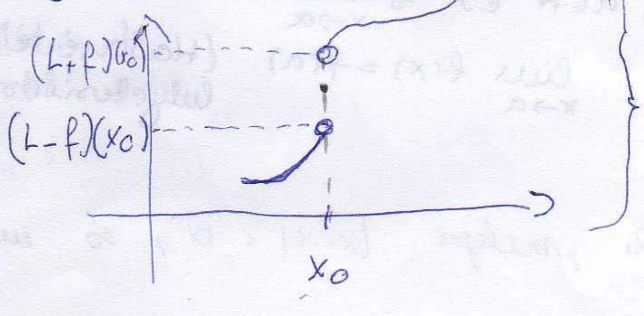
$$(L_-f)(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0,\ x \in \mathcal{J}\}$$

(Nem jó!)

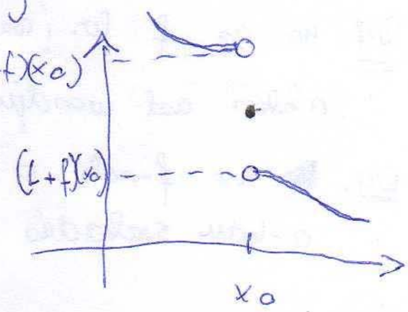


(93) $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, f monoton nő $\mathcal{J}$-n,
(*) $x_0 \in \mathcal{J}' \Rightarrow$ létezik f jobboldali határértéke x_0-ban, és

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0,\ x \in \mathcal{J}\} = (L_+f)(x_0)$$



(94) (*) (0) $(L_-f)(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf\{f(x) : x < x_0,\ x \in \mathcal{J}\}$



(95) (*, 0) $(L_+f)(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup\{f(x) : x > x_0,\ x \in \mathcal{J}\}$

96 Def.

Legyen $f: H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}$ fv. akkor mondjuk, hogy f fv. az $a \in H$ pontban folytonos, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz $\exists$ olyan ε-tól és a-tól függő $\delta > 0$ szám, hogy $\forall$ $x \in H$ $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ teljesül. Logikai jelölésekkel:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0, \; x \in H, \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

97 Az $f: H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}$ fv. akkor és csakis akkor folytonos $a \in H$ pontban, ha $\underbrace{\forall x_n \in H \; n \in \mathbb{N} \; \lim_{n \to \infty} x_n = a}_{x_n \in H, \; n \in \mathbb{N}}$, $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

Minden H-beli, a-hoz konvergáló $x_n, n \in \mathbb{N}$ pontsorozatra,

98 $f: H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}$, $a \in H$

$f \in C_a \iff$ vagy(a) $a \in H$, de $a \notin H'$ (a izolált pontja H-nak)

vagy(b) $a \in H$, $a \in H'$ és $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ határérték, és $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (Határérték megegyezik a helyettesítési értékkel.)

99 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1 pontban nem folytonos.

$\exists$ $\varepsilon_0 > 0$ $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$, melyre $|x-1| < \delta$, és mégis

$|f(x) - f(1)| \geq \varepsilon_0$

100 Def: Ha az f fv. (az értelmezési tartománya) $a \in H$ pontjában nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy szakadása van abban a pontban.

Def. az f-nek $a \in H$ pontban megszüntethető szakadása van, ha a-ban szakadás van, de $\exists$ véges $\lim_{x \to a} f(x)$ $(\neq f(a))$

Def: az f-nek $a \in H$ pontban ugrása van, ha léteznek f-nek a-ban a baloldali és jobboldali véges határérték, de különböznek.

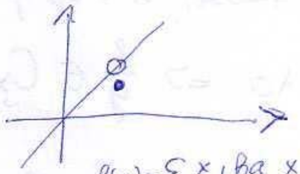
$\boxed{\text{II}}$

100 Folytatás

Szakadási helyek osztályozása:

(1.) Elsőfajú szakadási helyek:

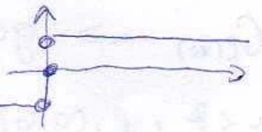
- megszüntethető szakadási hely $\Leftarrow$



$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$ $(x_0 = 1)$

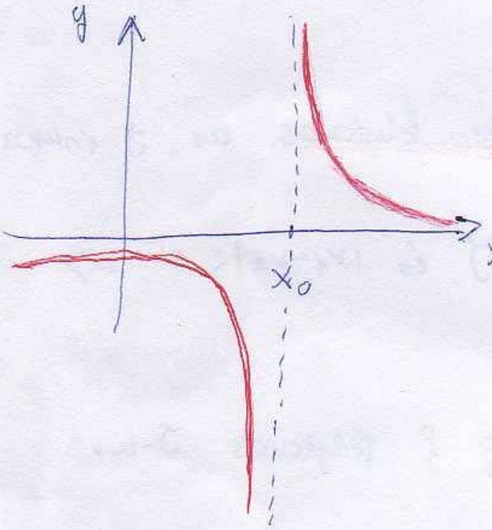
- ugrása van f-nek x_0-ban

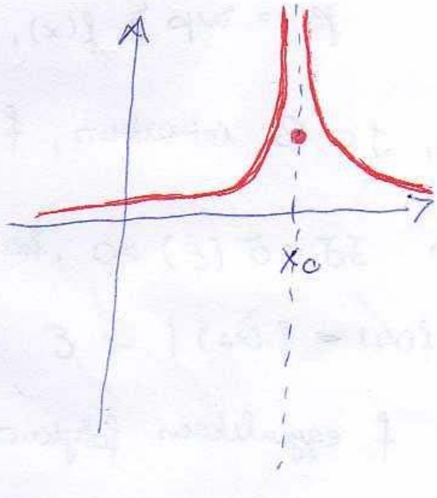
$\Uparrow$

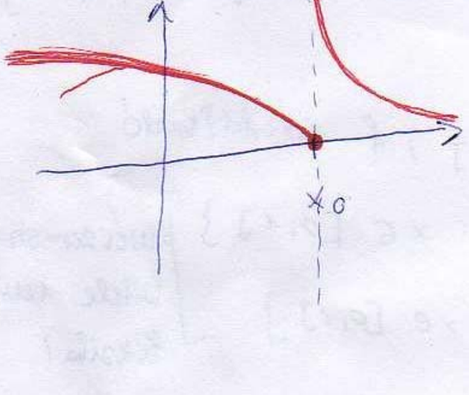


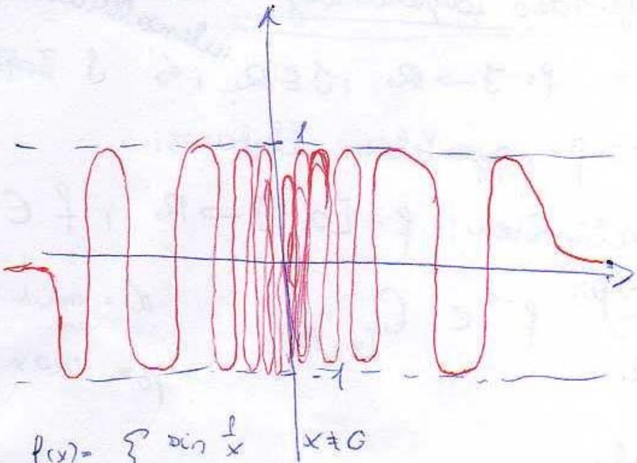
(2.) Másodfajú szakadási helyek:

$\boxed{\text{nem}}$ elsőfajú szak. helyek









$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(101) $f, g: H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in H$, $f, g \in C_{x_0}$

$\Rightarrow f+g$, $f \cdot g \in C_{x_0}$

(102) $f, g: H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in H$, $f, g \in C_{x_0}$,

$g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in C_{x_0}$

(103) $f: H \to K$, $g: K \to \mathbb{R}$, $H, K \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in H$

$f \in C_{x_0}$, $g \in C_{f(x_0)} \Rightarrow g \circ f \in C_{x_0}$

(104) Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ szig. mon. folytonos fv., akkor az f fv. f^{-1} létezik, és

$f^{-1}: (\alpha, \beta) \to (a, b)$ inverze és ugyanolyan értelemben szig. monoton és folytonos, ahol

$\alpha := \inf \{ f(x), x \in (a, b) \}$

$\beta := \sup \{ f(x), x \in (a, b) \}$

(105) $f: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, f egyenletesen folytonos az $\mathcal{I}$ intervallumon, ha

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ha $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ és $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Megjegyzés: f egyenletesen folytonos $\mathcal{I}$-n $\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}$ f folytonos $\mathcal{I}$-n.

(106) Egyenletes folytonosság tétele:

Ha $f: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, és $\mathcal{I}$ korlátos és zárt (kompakt), $f \in C_{\mathcal{I}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ egyenletesen folytonos.

Esetünkben $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \in C_{[0,1]}$, f invertálható

inv. fv. folyt. $\Rightarrow f^{-1} \in C_{[\alpha, \beta]}$, $\alpha = \min \{ f(x) : x \in [0,1] \}$, $\beta = \max \{ f(x) : x \in [0,1] \}$ — Weierstrass tétele miatt léteznek!

egyenl. folyt. tétele $\Rightarrow$ f^{-1} egyenl. folytonos $[\alpha, \beta]$-n.

III

107 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \in C_{[0,1]}$

$\max \{ f(x) : x \in [0,1] \} = 2$

$\min \{ f(x) : x \in [0,1] \} = -1$

$R_f = ?$

$f \in C_{[0,1]} \Rightarrow$ Érvényes Bolzano tétele.

legyen $x_M \in [0,1]$ $f(x_M) = 2$
$x_m \in [0,1]$ $f(x_m) = -1$

Bolzano tétele alapján $\forall$ $c \in (-1,2)$ számhoz $\exists$ ξ az x_m és x_M pontok között, melyre

$$f(\xi) = c, \text{ és}$$

$\forall x \in [0,1]$ $-1 \le f(x) \le 2$

$\Rightarrow R_f = [-1, 2]$

108 $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f, g \in C_{[0,1]}$

$f \cdot g$ egyenletesen folytonos-e a $[0,1]$-en.

$f, g \in C_{[0,1]} \underset{\text{műveleti tulajdonságok}}{\Longrightarrow} f \cdot g \in C_{[0,1]}$ } Egyenletes folyt. tétele $\Longrightarrow$ $f \cdot g$ egyenletesen folytonos $[0,1]$-ben

$[0,1]$: korl. zárt intervallum

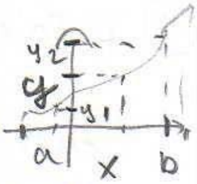
109 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \in C_{[0,1]}$

$f \in C_{[0,1]} \underset{\text{Bolzano t. köv.}}{\Longrightarrow}$ Értékkészlete intervallum

$[0,1]$ korl., ~~zárt~~ kompakt $\Rightarrow$ ÉK. is korl., ~~zárt~~ intervallum

kompakt $\Rightarrow$?

110 Véges, zárt intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvény felveszi a szélsőértékeit.



111 Tfh. az $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f: J \to \mathbb{R}$ valós fv. folytonos. Ekkor f értékkészletének bármely 2 eleme közötti értéket is felveszi, azaz bármely $a, b \in J$ $(a<b)$ $y_1 = f(a)$ $y_2 = f(b)$ y_1 és y_2 közé eső y-hoz $\exists\; a < x < b$, amelyre $f(x) = y$