FELADATOK

a *Bevezetés a matematikába I* tárgyhoz
a számítástechnika tanár főiskolai és a programozó matematikus szakok számára

2004. november 4.

FIGYELEM: a számtech szakosoknak csak a következő feladatok kellenek:
2,6,7,8,9-13,16-25,27,31-33.

- Halmazok, leképezések és relációk

1. Adjuk meg elemeivel a $P(P(P(\emptyset)))$ halmazt.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$,

(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

(c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(d) $A\Delta(A\Delta B) = B$,

(e) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$,

(f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, ha $A \subseteq C$.

3. Az A, B, C halmazok elemeire való hivatkozás nélkül bizonyítsuk be, hogy

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$,

(b) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$,

(c) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$.

4. Igazoljuk, hogy ha az A, X, Y halmazokra $A \cup X = A \cup Y$ és $A \cap X = A \cap Y$ teljesül, akkor $X = Y$.

5. Határozzuk meg az $\alpha^{-1}, \alpha\alpha^{-1}, \alpha^{-1}\alpha$ megfeleltetéseket, ha α az alábbi megfeleltetések valamelyike:

(a) $\{(a, b)\colon a \leq b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

(b) $\{(a, b)\colon b = \sin(a)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

(c) $\{(a, b)\colon\ a \text{ és } b \text{ relatív prímek}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6. Határozzuk meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyek leképezések közülük?

(a) $\{(x, y)\colon y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

(b) $\{(x, y)\colon y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

(c) $\{(x, y)\colon y = x^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

7. Vizsgáljuk meg, hogy injektív-e, illetve szürjektív-e a következő φ leképezés, és adjuk meg a $\varphi^2 (= \varphi\varphi)$ leképezést:

(a) $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n\varphi = \begin{cases} 6n + 1, & \text{ha } n \text{ páros}, \\ 6n - 1, & \text{ha } n \text{ páratlan}; \end{cases}$

(b) $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n\varphi = \begin{cases} n-10, & \text{ha } n > 10, \\ 1, & \text{ha } n \leq 10. \end{cases}$

8. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi relációk közül mekyik reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom. Ennek alapján állapítsuk meg, melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy rendezés. Adjuk meg az ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást is. (Az utolsó 6 relációban E az összes emberek halmaza.)

(a) $\{(a, b)\colon a/b \leq b/a\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon,

(b) $\{(a, b)\colon |a| = |b|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon,

(c) $\{(a, b)\colon a^2 + b^2 = 1\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon,

(d) $\{((a, b), (c, d))\colon a + d = b + c\}$ az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon,

(e) $\{((a, b), (c, d))\colon ad = bc\}$ a $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ halmazon,

(f) $\{(a, b)\colon a \mid b\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,

(g) $\alpha = \{(a, b)\colon b$ az a apja$\}$ az E halmazon,

(h) $\sigma = \{(a, b)\colon b$ az a apja vagy anyja$\}$ az E halmazon,

(i) $\tau = \{(a, b)\colon a = b$ vagy b az a testvére, azaz a és b apja és anyja közös$\}$ az E halmazon,

(j) $\varphi = \{(a, b)\colon a = b$ vagy b az a féltestvére, azaz a és b legalább egyik szülője közös$\}$ az E halmazon,

(k) $\lambda = \{(a, b)\colon$ b az a egyenesági leszármazottja, azaz b az a gyermeke vagy unokája vagy dédunokája vagy ... $\}$ az E halmazon,

(l) $\rho = \{(a, b)\colon$ b az a egyenesági rokona, azaz b az a egyenesági leszármazottja, vagy a a b egyenesági leszármazottja $\}$ az E halmazon.

• Kombinatorika

9. Hány szótárt kell kiadnunk, hogy közvetlenül tudjunk fordítani 10 különböző nyelv közül bármelyikről bármelyik másra?

10. A 30 tagú atlétikai szakosztály csapatokat állít ki a mezei futóversenyre.

(a) Hányféleképpen állíthatnak ki egy négytagú csapatot?

(b) Hányféleképpen jelölhetnek ki négy versenyzőt egy svéd típusú váltóra, melyben a csapattagok $100, 200, 400$, illetve 800 méteres távot futnak?

11. Egy postahivatalban tízféle képeslapot árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk

(a) 8 különböző képeslapot?

(b) 8 képeslapot?

(c) 12 képeslapot?

12. Öt kockán egyenként az alábbi betűk szerepelnek: A, B, C, D, E. Hány sorrendben rakhatjuk egymás mellé az öt kockát, ha

(a) az A betű közvetlenül a B betű előtt áll?

(b) a B betű nem állhat az A betű mellett?

13. Hányféleképpen helyezkedhet el 12 ember három szobában, ha az elsőben ketten, a másodikban hatan, a harmadikban négyen férnek el?

14. Hány 0-ra végződik a $11^{100} - 1$ szám?

15. Határozzuk meg az x^8 hatvány együtthatóját az $(1 + x^2 - x^3)^9$ kifejezésben.

16. Hány

(a) sem 5-tel, sem 7-tel

(b) sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel

nem osztható, 1000-nél kisebb nemnegatív egész szám van?

17. Hét férfi és négy nő közül úgy kell kiválasztani hat embert, hogy legalább két nő legyen közöttük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

18. Egy csomag francia kártya 52 lapból áll, amelyek közül 13-13 azonos színű.

(a) Hányféleképpen választhatunk ki közülük négy, páronként különböző színű lapot?

(b) Hányféleképpen választhatunk ki közülük négy különböző színű lapot, ha még azt is megköveteljük, hogy ne legyen köztük két azonos értékű (pl. két nyolcas vagy két király)?

(c) Hányféleképpen választhatunk ki a kártyacsomagból négy lapot úgy, hogy legyen köztük legalább két ász?

19. Az $1, 2, ..., n$ számok permutációi között hány olyan van,

(a) amelyben az 1 és 2 számok nem állnak egymás mellett?

(b) amelyben az 1, 2 és 3 számok semmilyen sorrendben sem állnak egymás mellet (számhármasként)?

(c) amelyben az 1, 2 és 3 számok közül semelyik kettő sem áll egymás mellett?

20. Hány különböző lineáris rendezése van egy n-elemű halmaznak?

21. Hat golyó közül három fekete, egy-egy pedig piros, fehér, illetve zöld. Hányféleképpen állíthatunk össze ezek felhasználásával egy négy golyóból álló sorozatot?

22. Négy férfit és négy nőt le akarunk ültetni egy kerek asztal köré. Két ülésrendet akkor tekintünk azonosnak, ha mindenkinek ugyanaz a bal, illetve jobb szomszédja.

(a) Hányféleképpen ülhet le a nyolc ember?

(b) Hány olyan ülésrend van, amelynél két előre kijelölt személy egymás mellé kerül?

(c) Hányféle ültetés van, ha nők nem ülhetnek egymás mellett?

23. Határozzuk meg az alábbiakban megadott számjegyek permutálásával kapható összes négyjegyű szám összegét (0 nem állhat a négyjegyű szám elején!):

(a) $1, 2, 3, 4$;

(b) $1, 3, 3, 3$;

(c) $1, 1, 4, 4$;

(d) $0, 1, 2, 3$.

24. 18 (egyforma) tízforintost osztunk szét öt gyerek között.

(a) Hányféle módon végezhetjük el a szétosztást?

(b) Hány eset van akkor, ha kikötjük, hogy minden gyerek kap legalább egyet a tízforintosok közül?

(c) S ha mindegyik legalább kettőt kap?

25. Hányféleképpen húzhatunk fel egyik kezünkre öt különböző gyűrűt, ha a hüvelykujjunkra nem kerülhet gyűrű?

26. A könyvespolcon 12 könyv áll. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani ötöt úgy, hogy ezek között ne legyen két egymás melletti?

27. Hányféleképpen ültethetünk le egy sorba három angolt, három franciát és három törököt úgy, hogy három azonos nemzetiségű ember ne kerüljön egymás mellé?

28. Artúr király kerek asztala körül 12 lovag ül. Mindegyikük hadilábon áll a két szomszédjával (és csak velük). A királynak a hercegnő kiszabadítására úgy kell kiválasztania öt lovagot, hogy ezek mindegyike békében legyen a másik néggyel. Hányféleképpen választhat Artúr király?

29. Egy 10 házaspárból álló társaság csónakkirándulásra indul. Öt, egyenként négyszemélyes csónakba szálnak.

(a) Hányféleképpen tehetik ezt meg úgy, hogy mindegyik csónakba két férfi és két nő kerül?

(b) ezek közül hány esetben kerül

(b1) egy előre kijelölt férj (b2) két előre kijelölt férj

egy csónakba a feleségével?

30. Hányféleképpen lehet az 1999 számot

(a) öt nemnegatív egész szám

(b) öt pozitív egész szám

összegére bontani, ha két felbontást akkor is különbözőnek tekintünk, ha csak a tagok sorrendjében térnek el egymástól?

31. Öt házaspár hányféleképpen támcolhat úgy, hogy egyik férj sem a saját feleségével táncol?

32. Hányféleképpen oszthatunk szét egy csomag francia kártyát 13 játékos között, ha

(a) mindegyikük négy-négy lapot kap?

(b) mindegyik játékos négy különböző színű lapot kap?

(c) egy játékos négy különböző színű lapot, a többi pedig négy-négy azonos színű lapot kap?

33. Hányféleképpen húzhatunk ki egy csomag francia kártyából négy olyan lapot,

(a) amelyek közül két lap színe megegyezik?

(b) amelyek között pontosan két szín fordul elő?

34. Három ember között hat egyforma almát, egy narancsot, egy szilvát, egy citromot, egy körtét, egy banánt és egy barackot osztunk el.

(a) Hányféleképpen tehető ez meg?

(b) Hány olyan elosztás van ezek között, amikor mindenki négy-négy gyümölcsöt kap?

35. Hányféleképpen helyezhetünk el 40 különböző díszhalat két egyforma nagy és négy egyforma kicsi akváriumba úgy, hogy a nagy akváriumokba $10-10$, a kicsikbe pedig $5-5$ hal kerüljön?

36. Hányféleképpen választható ki a 32 lapos magyar kártyából 10 lap úgy, hogy közöttük mind a négy szín előforduljon?

37. 10 egyforma szegfűt, 6 egyforma rózsát és 9 egyforma tulipánt hányféleképpen oszthatunk szét 25 lány között úgy, hogy mindenki pontosan egy szál virágot kapjon?

38. Hányféleképpen ültethet le Hófehérke a hét törpe közül ötöt egy hosszú asztal mellé úgy, hogy Tudor és Morgó ne üljön egymás mellett?

39. Hányféleképpen választhatunk ki n tárgy közül páratlan számú tárgyat.

40. Bizonyítsuk be kombinatorikus úton, hogy: $\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} = n^3$.

41. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

(a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(b) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$.

(c) $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$.

(d) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

(e) $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$.

(f) $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

42. Az origóból mindig jobbra illetve felfelé szomszédos rácspontokra egységnyit lépve hányféleképpen juthatunk el $(7, 11)$-be, ha sose léphetünk olyan helyre, ahol $y = x - 3$?

43. 15 fiú és 12 lány hányféle sorrendbe mehet be a táncterembe, ha sosem lehet több lány odabent, mint fiú?

44. Egy mozi pénztáránál $2n$ gyerek áll sorba 10 forintos jegyekért. Közülük n-nek tizese, a másik n-nek huszasa van. A kasszában nincs váltó pénz. Hány olyan sorrendje van a gyerekeknek, amikor a sor nem akad el, a pénztáros mindig tud visszaadni?