MEGOLDÁSOK

a *Bevezetés a matematikába I* tárgyhoz
a számítástechnika tanár főiskolai és a programozó matematikus szakok számára

2004. november 4.

1. $P(P(P(\emptyset))) = \{\, P(P(\emptyset)), \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\,\}$.

2.(c). Az $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ miatt $A \setminus (B \setminus C) = A \cap \overline{(B \cap \overline{C})}$. A de Morgan azonosságokból ez ugyanaz mint $A \cap (\overline{B} \cup C)$, disztributivitással ez egyenlő $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$-vel.
(f). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. De $A \subseteq C$ miatt $A \cup C = A$.

3.(b). $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap \overline{B} \subseteq \overline{B} \cap (B \cup C) = \overline{B} \cap C \subseteq C$. A másik irányra: $A \cap \overline{B} \subseteq C \Rightarrow A \subseteq A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B \subseteq B \cup C$.

4. Az állítás következik az alábbi azonosságból: $X = ((A \cup X) \setminus A) \cup (A \cap X)$.

5.(c). $\alpha^{-1} = \alpha$, ezért $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha$. $k, m \in \mathbb{Z}$ egészekre $k(\alpha\alpha)m$, ha létezik l egész szám, hogy $k\alpha l$ és $l\alpha m$, vagyis olyan l, ami a k-hoz és m-hez is relatív prím. Az $l = 1$ midig ilyen, ezért $\alpha\alpha = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6.(a). ÉT=ÉK=$\mathbb{R}$ és leképezés, mert minden $x \in \mathbb{R}$-hez egy y tartozik, hogy (x, y) eleme a megfeleltetésnek.

7.(a). Nem szürjektív, mert nem igaz, hogy minden elemnek ($\mathbb{N}$-beli számnak) legalább egy őse van, pl. 1-nek nincsen. Injektív, mert $n\varphi = m\varphi$ csak úgy lehet, ha $m = n$ (minden elemnek legfeljebb egy őse van). Ugyanis n, m paritása meg kell, hogy egyezzen, ha m és n párosak, akkor $n\varphi = m\varphi$ ugyanaz mint $6n + 1 = 6m + 1$, amiből valóban $m = n$. Hasonlóan, ha egyszerre páratlanok, akkor $6n - 1 = 6m - 1$, amiből ismét $m = n$. $\varphi^2(n) = \varphi(\varphi(n))$. Ha n páros, akkor ez $\varphi(6n+1) = 36n + 5$, ha pedig n páratlan, akkor ez $\varphi(6n - 1) = 36n - 7$.

8.(a). Átalakitásokkal (a, b) eleme a relációnak pontosan akkor, ha $(a^2 - b^2)/(ab) \leq 0$.

Reflexív, mert $a = b$ esetén ez mindig fennáll ($a \neq 0$). Dichotom is, mert igaz, hogy bármely a, b nemnulla valósakra az (a, b) és (b, a) közül legalább egyik a relációhoz tartozik. Ha (a, b) nem, akkor $(a^2 - b^2)/(ab) > 0$, de így $(b^2 - a^2)/(ab) \leq 0$, vagyis (b, a) már eleme.

Nem szimmetrikus, mert $(1, 2)$ eleme, de $(2, 1)$ nem. Nem antiszimmetrikus, mert megadhatóak a, b nemnulla valósak, hogy (a, b) és (b, a) is elemei a relációnak, pl. $a = 1, b = -1$. Nem tranzitív $(1, 3)$ és $(3, -2)$ elemei a relációnak, de $(1, -2)$ nem.

A reláció sem nem ekvivalencia (nem szimmetrikus, nem tranzitív), sem nem részbenrendezés (nem antiszimmetrikus, nem tranzitív), és sem nem rendezés (nem részbenrendezés).

9. 90.

10.(a). $\binom{30}{4}$. 30-ból kell kiválasztani 4-et.
(b). $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$.

11.(a). $\binom{10}{8}$.
(b). $\binom{10+8-1}{10}$. 10 elem (a képeslapok) 8 elemű részrendszerit kell megszámolni.
(c). $\binom{12+8-1}{12}$.

12.(a). 4!. Az AB-t egy betűnek tekinthetjük, ezzel a feladat ugyanaz mint négy különböző elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni.
(b). 48. Figyelembe kell venni, hogy a számunkra érdekes esetekben a BA sorrend is előfordulhat.

13. $\frac{12!}{2!6!4!}$.

14. 3 nullára végződik. $(10 + 1)^{100}$ binomiális-tétel szerinti kifejtése a következő: $1 + \binom{100}{1}10 + \binom{100}{2}10^2 + \binom{100}{3}10^3 + k$, ahol k 10^4-nel osztható. Ebből kivonva egyet kapjuk: $10^3 \cdot 496 + k$, ami 3 nullára végződik.

15. $\binom{9}{5}+\frac{9!}{6!2!}$. A polinomiális-tétel szerint: $(1+x^2-x^3)^9=\sum_{\substack{0\geq k_1,k_2,k_3\\ k_1+k_2+k_3=9}}(-1)^{k_3}x^{2k_2+3k_3}$. $2k_2+3k_3=8$ két esetben lehet: $k_1=5,k_2=4,k_3=0$ vagy $k_1=6,k_2=1,k_3=2$. Ezek előfordulását leszámolva kapjuk a megoldást.

16.(a). $1000-a_5-a_7+a_{35}$. Jelölje a_k a k-val osztható nemnegatív, 1000-nél kisebb egészek számát. $a_k=[\frac{1000}{k}]$, ahol $[x]$ az x felső egészrésze, azaz x-nél nem kisebb egészek minimuma. A megoldást a szita-formula adja.

(b). $1000-a_2-a_3-a_5-a_7+a_6+a_{10}+a_{14}+a_{15}+a_{21}+a_{35}-a_{105}-a_{70}-a_{42}-a_{30}+a_{210}$.

17. $\binom{7}{2}+4\binom{7}{3}+\binom{4}{2}\binom{7}{4}$. Külön számoljuk az eseteket aszerint, hogy 4, 3 illetve 2 nő szerepel a kiválasztott 6 ember közt.

18.(a). 13^4.

(b). $13\cdot 12\cdot 11\cdot 10$.

(c). $1+4\cdot 48+\binom{4}{2}\binom{48}{2}$. Külön számoljuk az eseteket aszerint, hogy 4, 3 illetve 2 ászt választottunk.

19.(a). $(n-1)!(n-2)$.

(b). $(n-2)!(n^2-n-6)$.

(c). $(n-2)!(n^2-7n+12)$.

20. $n!$.

21. $4!+3\frac{4!}{2!}+3\frac{4!}{3!}$. Külön számoljuk az eseteket aszerint, hogy 1, 2 illetve 3 fekete golyó szerepel a sorozatban.

22.(a). 7!. 8! féleképpen ül le egy sorba a 8 ember. De mindegyik megegyezik a 8 elforgatottjával, ezért a megoldás: $8!/8=7!$.

(b). $2\cdot 6!$.

(c). 3!4!. Először leül a 4 nő, kihagyva egy széket. Ez 3! lehetőséget ad. Minden ilyen sorrend 4! féleképpen egészül ki amikor a kihagyott helyekre leültetjük a férfiakat.

23.(a). 66660. Egy helyiértéken egy számjegy (3!)-szor fordul elő. Ezért a keresett összeg: $(1+2+3+4)\cdot 6\cdot 1111$.

24.(a). $\binom{18+5-1}{18}$.

(b). $\binom{13+5-1}{13}$.

(c). $\binom{8+5-1}{8}$.

25. 4^5.

26. $\binom{12-4}{5}$. A kihúzott könyvek sorszámát írjuk le, pl. $(1,5,7,10,12)$. A feladat ugyanaz mint hány olyan $(k_1,...,k_5)$ sorozat van, amelyekre $1\leq k_1$, $k_5\leq 12$ és $k_{i+1}-k_i>1$ minden $i=1,...,4$ esetén. Egy ilyen sorozatból képezzük a következőt: $(k_1,k_2-1,k_3-2,...,k_5-4)$. Tehát a feladat ugyanaz mint hány olyan $(k_1,...,k_5)$ sorozat van, amelyekre $1\leq k_1\leq k_2\leq...\leq k_5\leq 8$. Az ilyen sorozatok száma pedig: $\binom{8}{5}$.

27. Szita-formulával. A_a, A_f és A_t legyen azon sorrendek halmaza amelyek során a három angol, francia illetve török egymás mellett ül. A megoldás: $9!-|A_a\cup A_f\cup A_t|$.

28. $\binom{11-4}{5}+\binom{9-3}{4}$. Vizsgáljuk külön az eseteket aszerint, hogy az 1-es számú lovag szerepel-e a kiválasztottak között (a lovagokat megszámoztuk $1-12$-ig). Ha nem szerepel, akkor a maradék $2,...,12$ számú lovagok közül kell választani 5 nemszomszédosat (ld. 26. feladat). Ha pedig az 1-es szerepel, akkor a $3,...,11$ számúak közül kell 4 nemszomszédosat (ld. 26. feladat).

29.(a). $\left(\frac{10!}{2^5}\right)^2$.

(b1). $\frac{10!}{2^5}\cdot\frac{9!}{2^4}$.

(b2). $5\left(\frac{8!}{2^4}\right)^2+\binom{5}{2}\left(\frac{8!}{2^3}\right)^2$.

30.(a). $\binom{1999+5-1}{1999}$. A $k_1+...+k_5=1999$ felbontás felejen meg az $\{1,...,5\}$ halmaz egy olyan részrenszerének, amelyben az i elem k_i-szer szerepel. Ezen részerendszerek száma a megoldás.

(b). $\binom{1994+5-1}{1994}$. A $k_1+...+k_5=1999$ felbontás felejen meg az 1994 következő felbontásának:

$(k_1-1)+...+(k_5-1)=1994$. A tagok itt már nemnegatívok, az (a)-nál használt ötlet alkalmazható.

31. Szita-formulával. A_i legyen azon táncrendek halmaza, amelyeknél az i-edik férj a saját feleségével táncol. A megoldás: $5!-|A_1\cup...\cup A_5|$.

32.(a). $\frac{52!}{(4!)^{13}}$.
(b). $(13!)^4$.
(c). $13^4\cdot\frac{12!}{(3!)^4}\cdot\frac{12!}{(4!)^3}$.

33.(a). $\binom{52}{4}-13^4$. Az összes lehetőség számából kivonjuk azok számát amikor 4 különböző színű lapot húzunk ki.
(b). $4\binom{13}{2}3\cdot13^2$.

34.(a). $3^6\cdot\binom{3+6-1}{6}$. Először kiosztjuk a 6 különböző gyümölcsöt (3^6), majd a 6 almát ($\binom{3+6-1}{6}$).
(b). 3^6-39.

35. $\binom{40}{20}\frac{1}{2}\cdot\binom{40}{20}\frac{1}{4!}$.

36. $\binom{32}{10}-6\cdot\binom{16}{10}-4x$, ahol $x=\binom{24}{10}-3\binom{16}{10}$. Az összes lehetséges kiválasztás számából kivonjuk rendre azok számát amelyeknél csak 2 illetve 3 szín fordul elő. Az utóbbi lesz $4x$.

37. $\frac{25!}{10!\cdot6!\cdot9!}$.

38. $5!+2\binom{5}{4}5!+\binom{5}{3}4!\cdot2$. Megkülönböztetünk három esetet aszerint, hogy az 5 leültetendő törpe között Tudor és Morgó közül egyikük sem, pontosan egyikük illetve mindketten szerepelnek.

39. 2^{n-1}.

40. Az $\{1,2,3\}$ halmazból az $\{1,2,...,n\}$ halmazba képező függvények száma: n^3. Számoljuk külön a függvényeket aszerint, hogy az értékkészletük hány elemű (1, 2 vagy 3). Ezzel megkapjuk a kívánt azonosságot.

41.(a)-(c). A definíció alapján könnyen ellenőrízhetőek.
(d). használjuk (a)-t és azt hogy $\sum_{k=0}^{n}=2^n$.
(e). Tekintsük a következő kombinatorikus feladot: egy osztályba r lány és s fiú jár, hányféleképpen választhatunk ki az osztályból n gyereket. A megoldás: $\binom{r+s}{n}$. Ezt megkaphatjuk úgy is, hogy ha külön számoljuk az eseteket aszerint hogy hány lány van a kiválasztott gyerekek között. Azon esetek száma amikor pontosan k lány szerepel: $\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$.
(f). Az (e)-ből következik az $r=s=n$ helyetessítéssel.

42. $\binom{18}{7}-\binom{18}{4}$. Tükrözzük a $(7,11)$ pontot az $y=x-3$ egyenesre, a tükörképet jelöljük (a,b)-vel. Ezt magaphatjuk két egyenletből: az (a,b) és a $(7,11)$ pontok felezőpontja az $y=x-3$ egyenesen van, ezért $\frac{b+11}{2}=\frac{a+7}{2}-3$. Másrészt a $(7,11)$-ből az (a,b)-be mutató vektor merőleges az $y=x-3$ egyenesre, ezért $a+b=18$. A két egyenletetből $a=14$ és $b=4$. A feladat megoldása: a $(7,11)$-ben végződő bolyongások számábol kivonjuk a $(14,4)$-ben végződő bolyongások számát.

43. $\binom{27}{12}-\binom{27}{11}$. Egy sorrendet megfeleltethetünk egy, a $(15,12)$ pontban végződő bolyongásnak: ha az éppen bemenő ember fiú, akkor akkor egyet lépjünk fel, ha pedig lány, akkor egyet lépjünk jobbra. Ezzel az eredeti feladat ugyanaz mint hány, a $(15,12)$ pontban végződő, bolyongás van, ami soha nem lép az $y=x-1$ egyenesre. Ez megoldható a 46. feladat alapján.

44. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Egy sorrend megfeleltethető egy, az (n,n) pontban végződő bolyongásnak: ha az éppen belépő gyerek 10-essel fizet, akkor egyet lépünk fel, ha pedig 20-sal, akkor egyet jobbra. A feladat így az lesz, hogy hány az (n,n) pontban végződő bolyongás van, ami soha nem lép az $y=x-1$ egyenesre. Az ilyen bolyongások nevezetesek, ezek a Catalan-bolyongások. Az (n,n) pontban végződő Catalan-bolyongások száma az n-edik Catalan-szám: $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.