Lineáris Algebra gyakorlatok

Írta: Simon Ilona

Áttekintjük minden témakör legfontosabb definícióit és a feladatokban használt tételeket kimondjuk bizonyítások nélkül. Ezeket a hallgató előadásokon hallja, illetve utánanézhet az ajánlott szakirodalmakban. Az alábbi témakörök nem fedik le a Matematika tanár illetve Matematika BSc szakon követelt tudásanyagot, e gyakorlatsor számukra csupán segédanyag kíván lenni.

1.§ A V^2 és V^3 vektortér áttekintése

A hallgatónak már középiskolai tanulmányaiból ismerős a vektor fogalma. Ott *irányított véges szakasz* ként értelmezték a vektorokat a síkban (V^2) és a térben (V^3), ezt a fogalmat pontosítjuk.

Két irányított véges szakaszt egyenlőnek nevezünk, ha ha párhuzamos eltolással egymásba átvihetők (amikoris megegyezik a hosszuk, irányuk és irányításuk). Ha az egymással egyenlő irányított véges szakaszokat egy osztályba soroljuk, egy új vektorfogalomhoz jutunk: ezen osztályokat nevezzük **szabadvektor**nak. A $\underline{v}$ szabadvektor egy reprezentánsáról beszélek, ha az osztály egy adott kezdőponttal rendelkező elemét tekintem. Kijelölve egy adott pontot a síkban (ill. a térben), mondjuk az origót ($\underline{0}$(0,0,0)) tekinthetem csak az origó kezdőpontú reprezentánsokat. A továbbiakban vektor alatt szabadvektort értünk. (A vektortér fogalomhoz szükséges ezen definícióval élnünk. Ezen általánosabb fogalmat a x. fejezetben ismertetjük. Amennyiben a szabadvektor fent értelmezett fogalma idegenül hangzik az olvasónak, gondoljon arra, hogy egyszerűen leszűkítettük a vizsgálódást az origó kezdőpontú irányított véges szakaszokra.)

Vektorok összeadása a síkban: Ha $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$, akkor legyen $\underline{a} + \underline{b} \doteq (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Egy vektor skalárral való szorzása: Ha $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor legyen $\lambda\underline{a} \doteq (\lambda a_1, \lambda a_2)$.

Az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ vektor hossza: $|\underline{a}| \doteq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Két vektor skaláris szorzata: Ha $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$, akkor legyen $< \underline{a}, \underline{b} > \doteq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\sphericalangle(\underline{a}, \underline{b})$. Vegyük észre, hogy $< \underline{a}, \underline{a} >= |\underline{a}|^2$.

A fenti fogalmak mindegyike térben hasonlóan értelmezett... $\underline{a} + \underline{b} \doteq (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $\lambda\underline{a} \doteq (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$, $|\underline{a}| \doteq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ illetve $< \underline{a}, \underline{b} > \doteq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\sphericalangle(\underline{a}, \underline{b})$.

Egységvektornak nevezem azon vektorokat, melyek hossza 1-el egyenlő. Azt mondjuk, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok egymásra ortogonálisak (ill. merőlegesek), ha $< \underline{a}, \underline{b} >= 0$.

Az összeadás tulajdonságai:

a vektorok összeadása kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ $(\underline{a}, \underline{b} \in V^3)$
és asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V^3)$
a nullvektor létezése: $\exists\ \underline{0} \in V^3 : \underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ $(\underline{a} \in V^3)$
minden elemnek van inverze: $\forall \underline{a} \in V^3 \exists (-\underline{a}) \in V^3$ úgy hogy $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$.

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

asszociatív: $\lambda(\mu\underline{a}) = (\lambda\mu)\underline{a}$ $(\underline{a} \in V^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R})$
disztributív: $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ $(\underline{a}, \underline{b} \in V^3, \lambda \in \mathbb{R})$
disztributív: $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$ $(\underline{a} \in V^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R})$
$\forall \underline{a} \in V^3 : 1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$.

A skaláris szorzás tulajdonságai:

szimmetrikus: $< \underline{a}, \underline{b} >=< \underline{b}, \underline{a} >$ $(\underline{a}, \underline{b} \in V^3)$
additív: $< \underline{a} + \underline{b}, \underline{c} >=< \underline{a}, \underline{c} > + < \underline{b}, \underline{c} >$ $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V^3)$
homogén: $< \lambda\underline{a}, \underline{b} >= \lambda < \underline{a}, \underline{b} >$ $(\underline{a}, \underline{b} \in V^3, \lambda \in \mathbb{R})$
pozitív definit: $< \underline{a}, \underline{a} >\geq 0$ $(\underline{a} \in V^3)$ és $< \underline{a}, \underline{b} >= 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$.

Tekintsük a térben a következő egységvektorokat: $\underline{e}_1(1,0,0)$, $\underline{e}_2(0,1,0)$, $\underline{e}_3(0,0,1)$ (ez $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisa). Ekkor tetszőleges $\underline{v}(v_1,v_2,v_3)$ térbeli vektor felírható ezen vektorok segítségével a következőképpen: $\underline{v} = v_1\underline{e}_1 + v_2\underline{e}_2 + v_3\underline{e}_3$.

Állítás: Ha $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ és $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$, akkor $<\underline{a},\underline{b}>= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Definíció: : Az $\underline{a}$ vektornak a $\underline{b}$ vektorra való **merőleges projekció**ja alatt azon vektort értjük, amelynek végpontját az $\underline{a}$ vektor végpontjából a $\underline{b}$ vektorra bocsátott merőleges határoz meg. Jelölése: $proj_{\underline{b}}\underline{a}$

Állítás: $proj_{\underline{b}}\underline{a} = \frac{<\underline{a},\underline{b}>}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b}$.

Definíció: Az $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ vektorrendszert **jobbrendszer**nek nevezzük, ha a harmadik végpontja felől nézve az első vektor $180°$-nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányba. (Az ilyen rendszert nevezzük még jobbsodrású vagy jobbkézszabályt teljesítő rendszernek.)

Definíció: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térbeli vektorok **vektoriális szorzata** az az $\underline{a} \times \underline{b}$-vel jelölt vektor, amelynek

$$\begin{aligned}
&\text{hossza} : |\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\sphericalangle(\underline{a},\underline{b})\\
&\text{iránya} : \underline{a} \times \underline{b} \text{ merőleges } \underline{a}\text{-ra és } \underline{b}\text{-re}\\
&\text{irányítása} : \{\underline{a},\underline{b},\underline{a} \times \underline{b}\} \text{ jobbrendszert alkot.}
\end{aligned}$$

Tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
&\text{a vektoriális szorzás antiszimmetrikus: } \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \ (\underline{a},\underline{b} \in V^3)\\
&\text{a művelet homogén: } (\lambda\underline{a}) \times \underline{b} = \lambda(\underline{a} \times \underline{b}) \ (\underline{a},\underline{b} \in V^3)\\
&\text{és additív: } (\underline{a}+\underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c} \ (\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in V^3)
\end{aligned}$$

Vegyük észre továbbá, hogy $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$ tetszőleges $\underline{a} \in V^3$ esetén. Igaz továbbá, hogy $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$. Belátható, hogy

$$\begin{aligned}
\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 &= \underline{e}_3\\
\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 &= \underline{e}_1\\
\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 &= \underline{e}_2.
\end{aligned}$$

Állítás:

$$\begin{aligned}
\underline{a} \times \underline{b} =& (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot \underline{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot \underline{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot \underline{e}_3\\
=& \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \underline{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \underline{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \underline{e}_3 \quad \text{(a determináns értelmezése a köv. fejezetben)}\\
=& \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad \text{(Ez csak formális jelölés, hiszen a mátrix elemei igazából csak számok lehetnek.)}
\end{aligned}$$

Definíció: Az $\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in V^3$ vektorok **vegyes szorzata**: $(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \doteq <\underline{a} \times \underline{b},\underline{c}>$.

Belátható, hogy a vegyes szorzat kifejezhető a determináns segítségével:

$$(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ha $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ megegyezik az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatával. (Ellenkező esetben a térfogat (-1)-szeresét kapjuk.)

Könnyen igazolható, hogy $(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = (\underline{b},\underline{c},\underline{a}) = (\underline{c},\underline{a},\underline{b})$.

Feladatok:

1) Döntse el, hogy egy egyenesen van-e a következő három pont?

a) $A = (2, 1, -1), B = (3, 1, 2), C = (4, 1, 5)$;
b) $A = (-4, 5, 2), B = (2, 0, -3), C = (14, -10, -13)$;
c) $A = (1, 1, 1), B = (4, 1, 7), C = (5, -1, -1)$.

Megoldás: a) Amennyiben a pontok egy egyenesen vannak, úgy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok (ill. azok origó középpontú reprezentánsai) egymás konstansszorosai. Tehát keresendő olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$. Az $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (1, 0, 3)$, míg $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = (2, 0, 6)$, s így $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ összefüggésből látjuk, hogy a pontok egy egyenesen vannak.

2) A szögek kiszámítása nélkül döntse el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék-, vagy tompaszöget zárnak-e be:

a) $\underline{u}(-3, 2, 0), \underline{v}(4, 1, 5)$;
b) $\underline{u}(1, 1, 9), \underline{v}(2, 1, 3)$;
c) $\underline{u}(1, 1, 1), \underline{v}(-10, 7, 3)$;
d) $\underline{u}(5, -3, 4), \underline{v}(1, -1, 2)$.

Útmutatás: Mivel a vektor hossza nemnegatív, a skaláris szorzás definíciójából látható($<\underline{u}, \underline{v}> \doteq |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos \sphericalangle(\underline{u}, \underline{v})$) hogy a két vektor skaláris szorzatának előjele megegyezik a közrezárt szög koszinuszának előjelével. Tehát amennyiben a skaláris szorzat pozitív, úgy hegyesszöget zárnak be a vektorok; negatív szám esetén tompaszöget, a nulla esetén pedig derékszöget.
Így például az a) pontban $<\underline{u}, \underline{v}> = (-3)4 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 = -10 < 0$, tehát tompaszögről van szó.

3) Adott $\underline{a}$, $\underline{b} \in V^3$ vektorok esetén határozzuk meg a p értékét úgy, hogy $\underline{a} + p \cdot \underline{b}$ merőleges legyen a $\underline{b}$ vektorra!

Megoldás: A feltétel alapján $<\underline{a} + p \cdot \underline{b}, \underline{b}> = 0$, s így $<\underline{a}, \underline{b}> + p <\underline{b}, \underline{b}> = 0$. Ha tehát $\underline{b} \neq \underline{0}$, akkor $p = -\frac{<\underline{a},\underline{b}>}{|\underline{b}|^2}$ a megoldás, ám $\underline{b} = \underline{0}$ esetén tetszőleges $p \in \mathbb{R}$ megoldás lesz.

4) Adottak a következő vektorok:
$\underline{a} = (1, 3, -2)$
$\underline{b} = (-1, 2, 4)$
$\underline{c} = (4, 1, 3)$
Adja meg a következő vektorokat:
i) $-2\underline{a} + \underline{b} =$
ii) $\underline{a} \times \underline{b} =$
iii) $(\underline{a} + 3\underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b}) =$
iv) $proj_{\underline{a}}\underline{b}$
és a következő számokat:
v) $\cos(\alpha)$
vi) $<\underline{a}, \underline{b}> =$
vii) $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) =$
viii) $|\underline{a}| =$.

Megoldás:
i) $-2\underline{a} + \underline{b} = (-2, -6, 4) + (-1, 2, 4) = (-3, -4, 8)$
ii) $\underline{a} \times \underline{b} = (\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - 2\underline{e}_3) \times (-\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 4\underline{e}_3) = -\underline{e}_1 \times \underline{e}_1 + 2\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 + 4\underline{e}_1 \times \underline{e}_3 - 3\underline{e}_2 \times \underline{e}_1 + 6\underline{e}_2 \times \underline{e}_2 + 12\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 + 2\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 - 4\underline{e}_3 \times \underline{e}_2 - 8\underline{e}_3 \times \underline{e}_3 = 2\underline{e}_3 - 4\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 + 12\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 4\underline{e}_1 = 16\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + 5\underline{e}_3 = (16, -2, 5)$
Vagy a determináns fogalmának ismeretével:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 16\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + 5\underline{e}_3 = (16, -2, 5)$$

iii) $(\underline{a} + 3\underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b}) = \underline{a} \times \underline{a} - \underline{a} \times \underline{b} + 3\underline{b} \times \underline{a} - 3\underline{b} \times \underline{b} = -4\underline{a} \times \underline{b} = -4(16, -2, 5) = (-64, 8, -20)$
iv) $proj_{\underline{a}}\underline{b} = \frac{<\underline{a},\underline{b}>}{|\underline{a}|^2} \cdot \underline{a} = \frac{-3}{14} \cdot (1, 3, -2)$
v) $\cos(\alpha) = \frac{<\underline{a},\underline{b}>}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}}$

vi) $< \underline{a}, \underline{b} >= -1 + 6 - 8 = -3$
vii) $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) =< \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} >= 16 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 64 - 2 + 15 = 75$ vagy a determináns segítségével:

$$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 75$$

viii) $|\underline{a}| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$.

5) Adottak a következő vektorok:
$\underline{a} = (3, 1, 2)$
$\underline{b} = (-1, 2, 4)$
$\underline{c} = (1, 2, 3)$
Adja meg a következő vektorokat:
i) $3\underline{a} + 4\underline{b} =$
ii) $\underline{a} \times \underline{b} =$
iii) $(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - 2\underline{b}) =$
iv) $proj_{\underline{b}}\underline{a}$
és a következő számokat:
v) $\cos(\alpha)$
vi) $< \underline{a}, \underline{b} >=$
vii) $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) =$
viii) $|\underline{a}| =$.

6) Adja meg az alábbi vektorokat az $\underline{a} \times \underline{b} =$ segítségével:

$$a)(\underline{a} + 4\underline{b}) \times (\underline{a} - 2\underline{b}) =$$
$$b)(3\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{b} + 3\underline{a}) =$$
$$c)(\underline{a} + 2\underline{b}) \times (2\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{a} - 2\underline{b}) \times (2\underline{a} - \underline{b}) =$$

7) Számítsa ki a következő vektorok által meghatározott parallelepipedon térfogatát:
$\underline{u} = (1, 5, -1)$
$\underline{v} = (-3, -1, 2)$
$\underline{w} = (1, -2, -1)$
Megoldás: Mivel $V = |(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})|$ és

$$(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

ezért a térfogat $V = 7$.

8) Számítsa ki a következő vektorok által meghatározott parallelepipedon térfogatát:
$\underline{u} = (2, 3, -1)$
$\underline{v} = (-5, -1, 2)$
$\underline{w} = (1, -2, -1)$

2.§ Mátrixok determinánsa

Mielőtt áttekintenénk, hogy mit nevezünk mátrixnak, szükséges, hogy átnézzük a permutációk inverziójának fogalmát.

Definíció: Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemek egy sorrendjét ezen elemek egy **permutáció**jának nevezzük.

Jelölés: $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ vagy pedig $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$

Definíció: Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok összes permutációjának halmazát P_n-nel jelöljük.

Például az $\{1, 2, 3\}$ összes permutációi halmazának elemei a következőek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ permutációban az i_k **elem inverzióban van az i_l-lel**, ha $k < l$, de $i_k > i_l$.

Például a $\{2, 5, 4, 1, 3\}$ permutációnak 6 darab inverziója van. Ellenőrizze a kedves olvasó!

Jelölje $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ az $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ **permutáció inverzióinak a számá**t. Például $I(2, 5, 4, 1, 3) = 6$.

Mostmár elérkeztünk a mátrix fogalmához: Legyen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén. Az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú **mátrix**nak nevezzük. Jelölje az $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{m\times n}$.

A mátrix főátlója alatt az $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{nn}\}$ halmazt értjük. Az α_{ij} elem indexei közül az első a sorindex, a második pedig az oszlopindex. A mátrix i-edik sorát A_i, j-edik oszlopát pedig a^j jelölésekkel említjük.

A mátrixhoz rendelhetünk egy számot, a determinánsát, mely sokat elárul annak tulajdonságairol. (Ezen tulajdonságokra később fog fény derülni.)

Def: Ha az A mátrix $n \times n$-es típusú (azaz négyzetes) akkor annak **determináns**a alatt a következő számot értjük:

$$det(A) \doteq \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in P_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{ni_n}.$$

A mátrix minden sorából és oszlopából kiválasztva pontosan egy elemet az indexek az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok egy permutációját adják. A fenti formula azt jelenti, hogy a mátrix determinánsát úgy kapom, ha minden ilyen kiválasztás szerinti elemek szorzatát összeadom, de a páratlan inverziójú tagokat negatív előjellel véve.

A következő jelöléseket használjuk az A mátrix determinánsára:

$$\det(A), \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}, \qquad |A|$$

Sarrus szabály 2×2-es mátrix esetén:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Sarrus szabály 3×3-mas mátrix esetén:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$

A determináns elemi tulajdonságaiból megemlítjük a következőket:

♣ Ha az A mátrixban két sort (illetve oszlopot) egymással felcserélünk, akkor az így kapott mátrix determinánsa $= -\det(A)$.

♣ Ha a mátrixnak két sora (ill. oszlopa) megegyezik, akkor a determinánsa 0.

♣ Ha az A mátrix egy sorának (ill. oszlopának) minden elemét megszorozzuk az α számmal, akkor a kapott mátrix determinánsa $= \alpha \cdot \det(A)$.

♣ Legyen A, B, C három olyan mátrix, melyek csak az i-edik sorban (ill. oszlopban) különböznek egymástól a következőképpen: $\underline{c}_i = \underline{a}_i + \underline{b}_i$. Ekkor $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

♣ (Az előzőekből következik, hogy) ha az A mátrix valamely sorához (ill. oszlopához) hozzáadjuk egy másik sorának (ill. oszlopának) konstansszorosát, akkor a kapott mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

Az utóbbi tulajdonságra épül a Gauss-elimináció.

Nagyobb méretű mátrixokra külön eljárásokat használunk: a kifejtési tételt, mely eggyel kisebb méretű négyzetes mátrixok determinánsára vezet (használata ajánlatos pl. 4×4-es mátrix esetén) illetve a Gauss-elimináció segítségével felső trianguláris mátrixszá való átalakítással.

Kifejtési tétel: Jelölje a D_{ij} az α_{ij} elemet tartalmazó sor és oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát. Ezt az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsának nevezzük. Az A mátrix α_{ij} elemhez tartozó algebrai aldeterminánsa a következő szám:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Tétel(i-edik sor szerinti kifejtés): Tetszőleges $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij}.$$

Tétel (j-edik oszlop szerinti kifejtés): Tetszőleges $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij}.$$

A Gauss-elimináció módszere determinánsok kiszámítására:

Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ -t felső háromszög alakúnak vagy felső trianguláris mátrixnak nevezzük, ha $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$ -re. (Vagyis ha a főátló alatti elemek 0-val egyenlőek.)

Könnyen látható, hogy felső trianguláris mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzatával egyezik meg.

A Gauss-elimináció módszerének célja, hogy a mátrixot(melynek determinánsát keressük) egy olyan felső trianguláris mátrixxá alakítjuk, melynek determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.

Lépései:

◇ Esetleg sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{11} \neq 0$.

◇ Az első sor alkalmas konstansszorosát a többi sorhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \ldots, \alpha_{n1} = 0$ legyen.

◇ Esetleg sorcserével elérjük, hogy $\alpha_{22} \neq 0$.

◇ A második sor alkalmas konstansszorosát a $3., 4., \ldots, n.$ sorokhoz adva elérjük, hogy $\alpha_{32}, \alpha_{42}, \ldots, \alpha_{n2} =$ 0 legyen.

$\vdots$

Feladatok:

1) Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Megoldás:

$$detA = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-4)1 = 14$$

$$detB = \left| \begin{matrix} 0 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 0 + (-12) + 0 - (-12) - 0 - (-8) = 8$$

és a negyedik sor szerinti kifejtéssel: (ugyanilyen jó választás lett volna a harmadik oszlop szerinti kifejtés)

$$detC = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

Végül pedig a Gauss-eliminációval (az első sor (-1)-szeresét adva a többihez):

$$detD = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

2) Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix esetén a második sor (-1)-szeresét a többihez adva és kifejtve a 2. oszlop szerint:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = 2(-1)1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) = (-2)(n-2)!$$

4*) Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3.§ Lineáris kombináció, lineáris egyenletrendszerek, vektorok lineáris függetlensége

Definíció: Legyen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in V^3$, és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{a}_n.$$

Hasonlóan, egyenletek lineáris kombinációja alatt azok bizonyos együtthatókkal vett összegét értjük.

Definíció: Legyenek $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ és $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$. Az

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert **lineáris egyenletrendszer**nek nevezzük.

Definíció: A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa alatt a következőt értjük:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Gauss-féle eliminációs módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására:

Definíció: Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha az összes megoldásaik halmaza megegyezik.

Tétel: Az alábbi átalakítások egy lineáris egyenletrendszert egy vele ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

✠ egy egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$-val
✠ egy egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet λ-szorosát
✠ olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja
✠ egyenletek sorrendjének felcserélése
✠ az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt.

A lineáris egyenletrendszer Gauss eliminációval való megoldása azt jelenti, hogy a fenti átalalkításokkal trapéz alakúra hozzuk azt. (cél: $\alpha_{ij} = 0$ minden $i > j$ esetén)

Cramèr szabály: Ha az n egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem 0 ($det(A) \neq 0$), akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható és egyetlen megoldása:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{|A|},\ (k = 1, 2, \dots, n)$$

ahol

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \beta_n & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

tehát a k-adik oszlopba került a szabadtagok vektora.

Igaz továbbá, hogy ha $det(A) = 0$, de $\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}$ úgy, hogy $\Delta_k \neq 0$, akkor az egyenletredszernek nincs megoldása, ám $det(A) = \Delta_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ esetén lehet ∞ sok vagy 0 megoldás.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in V^3$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}\ (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Ellenkező esetben: ha van olyan, nem csupán 0-kból álló $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hogy $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok **lineárisan függőek**.

(Ez utóbbi esetben valamelyik vektor előáll a többiek lineáris kombinációjaként.)

Feladatok:

1) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$a)\ \left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$b)\ \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 8x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 25x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$d)\ \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$e)\ \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

$$a)\ \left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

(-2)I.+II. és (-3)I.+III.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 7x_3 &= -13 \\ 7x_2 + 10x_3 &= -13 \end{aligned}\right\}$$

(-7)II.+III.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 7x_3 &= -13 \\ -39x_3 &= 78 \end{aligned}\right\},$$

ahonnan $x_3 = -2$, majd $x_2 = -13 - 7(-2) = 1$ és végül $x_1 = 2 - 6 + 6 = 2$ adódik.

b) Hasonlóan eljárva azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -9x_2 - 6x_3 &= -8 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

amely egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van a következő módon: Választhatjuk x_3-at tetszőlegesnek: $x_3 = t \in \mathbb{R}$, ekkor $x_2 = \frac{8}{9} - \frac{2}{3}t$; $x_1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}t$ a megoldás.

c) Hasonlóan,

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= -1 \\ 14x_2 - 22x_3 &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

adódik, amely egyenletrendszer ellentmondásos, s így nincs megoldása. Tehát az eredeti egyenletrendszernek sincsen.

d)

$$\begin{cases} x_1 = -t + \dfrac{7}{5} \\ x_2 = -t + \dfrac{9}{5} \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x_1 = -3t + r - 5s + 3 \\ x_2 = t - 2r + 2s - 1 \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \\ x_4 = r \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \\ x_5 = s \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \end{cases}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

2) Adja meg az α-t úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek
a) egyetlen megoldása legyen
b) ne legyen megoldása
c) végtelen sok megoldása legyen:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ x + 2y + 3z &= 5 \\ x + 3y + \alpha z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás: Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 7.$$

A Cramèr szabály értelmében az egyetlen megoldás létezésének feltétele, hogy $D \neq 0$. Tehát ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$, akkor egyetlen megoldás létezik:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-9\alpha + 33}{\alpha - 7};$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{7\alpha - 25}{\alpha - 7};$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-6}{\alpha - 7}.$$

Továbbá $\alpha = 7$ esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek, mert ekkor $D = 0$, ám a D_x, D_y, D_z között létezik nemnulla. Nincs olyan α, hogy az adott lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

3) Adja meg az α-t úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek
a) egyetlen megoldása legyen
b) ne legyen megoldása
c) végtelen sok megoldása legyen:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 2x + 4y + z &= 3 \\ -2x + 3y + \alpha z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

$$a)\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{15}{8}\};$$
$$b)\ \alpha = -\frac{15}{8};$$
$$c)\ \text{nincs ilyen } \alpha.$$

4) Adja meg az α-t úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek
a) egyetlen megoldása legyen
b) ne legyen megoldása
c) végtelen sok megoldása legyen:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= -4 \\ 2x + 4y + z &= 3 \\ 3x + 2y + \alpha z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

$$a)\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\};$$
$$b)\ \text{nincs ilyen } \alpha;$$
$$c)\ \alpha = 2.$$

5) Lineárisan független-e az alábbi három vektor?
$\underline{a} = (6, 4, -1)$
$\underline{b} = (2, 1, 6)$
$\underline{c} = (1, 0, 4)$
Megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy mely λ_k együtthatókkal teljesülhet a

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} = \underline{0}$$

egyenlet!

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Így egy lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ismeretlenekre:

$$\left.\begin{aligned} 6\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 1\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Alkalmazzuk a Gauss-eliminációt:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ 25\lambda_2 + 16\lambda_3 &= 0 \\ 38\lambda_2 + 25\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

majd

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ 25\lambda_2 + 16\lambda_3 &= 0 \\ \frac{17}{25}\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

melyből a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ megoldás adódik, tehát az adott vektorok lineárisan függetlenek.

6) Lineárisan független-e az alábbi három vektor?
$\underline{a} = (3, 4, -1)$
$\underline{b} = (2, 5, 6)$
$\underline{c} = (1, 0, 1)$
Eredmény: A vektorok lineárisan függetlenek.

7) Lineárisan független-e az alábbi három vektor?
$\underline{a} = (-2, 0, 5)$
$\underline{b} = (1, 2, 3)$
$\underline{c} = (-3, 2, 13)$
Eredmény: A vektorok lineárisan függőek.

4.§ Vektortér, lineáris altér, generátorrendszer, bázis, egyenes és sík egyenlete

Definíció: A $V \neq \emptyset$ halmazt **vektortér**nek nevezzük az $\mathbb{R}$ felett, ha értelmezve van rajta egy + művelet az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{array}{l} \underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a} \ (\underline{a},\underline{b}\in V) \\ (\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c}) \ (\underline{a},\underline{b},\underline{c}\in V) \\ \exists\ \underline{0}\in V \text{ úgy, hogy } \underline{a}+\underline{0}=\underline{a} \ (\underline{a}\in V) \\ \forall\underline{a}\in V\exists(-\underline{a})\in V: \underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}. \end{array},$$

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és minden $\underline{a} \in V$ esetén értelmezve van $\lambda\underline{a} \in V$ és teljesülnek az alábbi műveleti tulajdonságok:

$$\begin{array}{l} \lambda(\mu\underline{a})=(\lambda\mu)\underline{a} \ (\underline{a}\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R}) \\ \lambda(\underline{a}+\underline{b})=\lambda\underline{a}+\lambda\underline{b} \ (\underline{a},\underline{b}\in V,\lambda\in\mathbb{R}) \\ (\lambda+\mu)\underline{a}=\lambda\underline{a}+\mu\underline{a} \ (\underline{a}\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R}) \\ \forall\underline{a}\in V\text{-re } 1\cdot\underline{a}=\underline{a}. \end{array}.$$

Emlékezzünk arra, hogy ezen tulajdonságok igazak az eddig megismert V^2 és V^3 halmazokra, de hasonlóan vektortér az $\mathbb{R}^n$ illetve az $R_n[x]$ is.

Definíció: A V vektortér L nem üres részhalmazát **altér**nek nevezzük, ha L maga is vektortér a V-beli műveletekkel.

Tétel: A V vektortér L nem üres részhalmaza pontosan akkor altér, ha a következő két tulajdonság teljesül:

$$\begin{array}{l} \forall\ \underline{a},\underline{b}\in L \text{ esetén } \underline{a}+\underline{b}\in L \\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R},\ \forall\underline{a}\in L \text{ esetén } \lambda\underline{a}\in L. \end{array}$$

Definíció: Legyen $H \neq \emptyset$ részhalamaza a V vektortérnek. A H által generált altér az a legszűkebb altere V-nek, mely tartalmazza H-t. Jelölés: $\mathcal{L}(H)$.

Definíció: A H halamaz **generátorrendszere**a V vektortérnek, ha: $\mathcal{L}(H) = V$.

Definíció: A V vektortér végesen generált, ha van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere.

Megjegyzés: A $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere a végesen generált V vektortérnek, ha a V halmaz minden eleme felírható a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok egy lineáris kombinációjaként.

Definíció: A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V vektortér egy **bázis**ának nevezzük.

Tétel: Végesen generált vektortérben minden bázis azonos számosságú.

Definíció: A vektortér bázisainak közös elemszámát a vektortér **dimenziójá**nak nevezzük. Jele: $dim(V)$

Definíció: Legyen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázis V-ben és $\underline{a} \in V$. Akkor azon $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számokat, melyekre $\underline{a} = \lambda_1\underline{b}_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$, az $\underline{a}$ vektor $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázisára vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Legyen $\mathbb{R}^n$ a valós számn-esek halmaza, azaz a következő Descartes-szorzat: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbb{R}^n$ vektortér. A műveletek, vektor hossza hasonlóan értelmezett, mint a V^3-ban.

Definíció: Legyen $\underline{v} \in V^2$ vagy $\underline{v} \in V^3$. Az $l \doteq \{\alpha\underline{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ halmazt **egyenes**nek nevezzük.

Megjegyzés: Az l tulajdonképpen végtelen sok egymással párhuzamos egyenest jelent.

Definíció: Legyen $\underline{u}, \underline{v} \in V^3 \setminus \{\underline{0}\}$ és $\nexists\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{u} = \lambda\underline{v}$. Az $L \doteq \{\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ halmazt **sík**nak nevezzük.

Megjegyzés: Az L végtelen sok egymással párhuzamos síkot jelent.

Az $L \doteq \{\alpha_1\underline{u}_1 + \alpha_2\underline{u}_2 + \ldots + \alpha_m\underline{u}_m : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$ halmazt az $u_1, \ldots, u_m$ által generált altérnek nevezzük. Amennyiben $u_1, \ldots, u_m$ lineárisan függetlenek, az L halmaz egy m-dimenziós lineáris altér, a $K \doteq \{\alpha_1\underline{u}_1 + \alpha_2\underline{u}_2 + \ldots + \alpha_m\underline{u}_m + \underline{v} : \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \in \mathbb{R}\}$, a K halmaz egy m-dimenziós affin altér. Minden affin altér előáll $K = L + \underline{v}$ alakban, ahol L egy lineáris altér $\underline{v}$.

HDefiníció: almazok (Minkowski-)összege: $A + B \doteq \{\underline{a} + \underline{b} | \underline{a} \in A,\ \underline{b} \in B\}$.

Azt mondjuk, hogy $L_1 + L_2$ direkt összeget alkot, ha $L_1 \bigcap L_2 = \{\underline{0}\}$.

Az $\underline{n}(n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú és $P(p_1, p_2, p_3)$ ponton átmenő sík egyenlete:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3.$$

Feladatok:

1) Lineáris illetve affin alteret alkotnak-e a következő halmazok:

$$L_1 = \{(2x_1, 4x_2, -x_1, 7x_2) | x_1, x_2 \in R\}$$
$$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, 3x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$
$$L_1 \cap L_2 (=?)$$
$$L_3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, 2x_1 - 3x_2 = -1\}$$

2) Lineáris illetve affin alteret alkotnak-e a következő halmazok:

$$L_1 = \{(2x_1 + 3, 5x_2, -x_1, x_2) | x_1, x_2 \in R\}$$
$$L_2 = \{(3x_1 + 2x_2, x_2, 4x_1, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

3) Lineáris illetve affin alteret alkotnak-e a következő halmazok:

$$L_1 = \{(5x_1, 3x_2, -x_1, x_2) | x_1, x_2 \in R\}$$
$$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, 3x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$
$$L_1 \cap L_2 (=?)$$
$$L_3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, 2x_1 - 3x_2 = -1\}$$

4) Adottak a következő vektorok:
$\underline{a}_1 = (2, 1, -2)$
$\underline{a}_2 = (2, 3, 1)$
$\underline{b}_1 = (-5, 2, 1)$
$\underline{b}_2 = (1, 0, 1)$
Legyen L_1 az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$, L_2 pedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ által generált lineáris altér. Döntse el, hogy $L_1 + L_2 (=?)$ direkt összeget alkot-e?

5) Adottak a következő vektorok:
$\underline{a}_1 = (2, 1, -2)$
$\underline{a}_2 = (2, 3, 1)$
$\underline{b}_1 = (-5, 2, 1)$
$\underline{b}_2 = (1, 0, 1)$
Legyen L_1 az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$, L_2 pedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ által generált lineáris altér. Döntse el, hogy $L_1 + L_2 (=?)$ direkt összeget alkot-e?

6)Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(1, -2, 3)$ pontra és párhuzamos a $3x - 4y + 5z = 3$ síkkal!

Eredmény: A keresett sík normálvektora $\underline{n}(3, -4 - 5)$, így a keresett egyenlet: $3x - 4y + 5z = 26$.

7)Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x = 2 + 3t,\ y = -1 + 2t,\ z = 3 - 2t$ és az $x = 1 + 3t,\ y = 2 + 2t,\ z = -3 - 2t$ párhuzamos egyenesekre!

Útmutató: Szükségünk van a sík egy pontjára, legyen ez pl. az első egyenes $t = 0$ pontjához tartozó pont: $P(2, -1, 3)$. egy irányunk már van, de szükségünk van egy másikra is, ezért a második egyenes egy $Q(1, 2, -3)$ pontját meghatározva adott a $\overrightarrow{PQ}(-1, 3, -6)(= \underline{q} - \underline{p})$ irány is az egyenesek közös irányvektorával együtt: $\underline{v} = (3, 2, -2)$, így a sík normálvektora:

$$\underline{n} = \overrightarrow{PQ} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (6, -20, -11).$$

Majd a sík egyenletének felírása következik: $6x - 20y - 11z + 1 = 0$.

8) Határozza meg a $P(5, 2, 4)$ pontra és az $x = t + 3,\ y = -2t - 2,\ z = 6$ egyenesre illeszkedő sík egyenletét!

Eredmény: $2x + y + 4z = 28$

9) Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(3, -1, 0)$ és $B(-1, 2, 1)$ pontokra és merőleges a $2x - y + z = 5$ síkra!

Útmutató: A keresett sík $\underline{n}$ normálvektora merőleges az $\overrightarrow{AB}$ vektorra és merőleges az adott sík $\underline{n}_1(2, 3, -1)$ normálisára, így $\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times n_1 = (4, 6, -2)$. Akkor tehát a sík egyenlete: $2x + 3y - z = 3$

10) Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(0, -1, 3)$ és $B(1, 2, -1)$ pontokra és merőleges az $x - y + 2z = 5$ síkra!

11)Írja fel a $P(-1, 2, 3)$ pontra illeszkedő és az $x + 2y - 3z + 1 = 0,\ x + 3y - z + 6 = 0$ síkokra merőleges sík egyenletét!

Útmutató: $\underline{n} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = (7, -2, 1)$

12)Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(-3, 2, 1)$ pontra, párhuzamos az $x = 3 + 2t,\ y = t,\ z = -1 + 4t$ egyenessel, és merőleges az $x - 2y + 5z - 3 = 0$ síkra!

Útmutató:

$$\underline{n} = \underline{v} \times \underline{n}_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (13, -6, -5).$$

13) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x = 1 + 3t,\ y = 3 + 2t,\ z = -2 - t$ egyenesre, és párhuzamos a $2x - y + z - 3 = 0$ és $x + 2y - z - 5 = 0$ síkok metszésvonalával!

Megoldás: Az adott síkok metszésvonalaának irányvektora merőleges az $\underline{n}_1$ és $\underline{n}_2$ normálisokra, így azt megkaphatjuk azok vektoriális szorzatával:

$$\underline{u} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 5).$$

Az adott egyenes irányvektora is a keresett síkhoz tartozik, $\underline{v}(3, 2, -1)$, s ezen vektorok vektoriális szorzata adja a keresett sík normálvektorát:

$$\underline{n} = \underline{v} \times \underline{u} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (13, -14, 11).$$

A sík egyenletének felírásához szükségünk van még egy pontjára: az adott egyenes $t = 0$ paraméterértékhez tartozó $A(1, 3, -2)$ pontja megfelelő lesz, s az egyenlet: $13x - 14y + 11z + 51 = 0$.

14) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x = 1 + t,\ y = 3 - 2t,\ z = -2 + 3t$ egyenesre, és párhuzamos a $2x - y + z - 5 = 0$ és $x + 2y - z - 9 = 0$ síkok metszésvonalával!

15) Határozza meg a $4x - 2y + 3z + 13 = 0$, $4y - 5x + 2z - 12 = 0$ és $6x - 4y - 5z + 11 = 0$ síkok közös pontjának koordinátáit!

Megoldás: A síkok közös pontja rajta van mindhárom síkon, ezért koordinátái kielégítik mindegyik sík egyenletét. Tehát a következő lineáris egyenletrendszer megoldásai adják a közös pont koordinátáit:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 2y + 3z &= -13 \\ -5x + 4y + 2z &= 12 \\ 6x - 4y - 5z &= -11 \end{aligned}\right\}$$

Így a közös pont: $P(-2,1,-1)$.

(Nem kell akkor sem megijedni, ha végtelen sok megoldás adódik, és épp egy egyenes pontjai. Miért?)

16) Határozza meg a $2x+y-3z-7=0$, $-y-4x+5z+9=0$ és $6x-2y-z+10=0$ síkok közös pontjának koordinátáit!

17) Lineáris illetve affin alteret alkotnak-e a következő halmazok:

$$L_1 = \{(3x_1, 7x_2, -x_1, x_2) | x_1, x_2 \in R\}$$
$$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, 3x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$
$$L_1 \cap L_2 (=?)$$
$$L_3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, 2x_1 - 3x_2 = -1\}$$

Amennyiben lineáris altér, adja meg egy bázisát!

18) Adottak a következő vektorok:
$\underline{a}_1 = (2,1,-2)$
$\underline{a}_2 = (2,3,1)$
$\underline{b}_1 = (-5,2,1)$
$\underline{b}_2 = (1,0,1)$

Legyen L_1 az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$, L_2 pedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ által generált lineáris altér. Döntse el, hogy $L_1 + L_2 (=?)$ direkt összeget alkot-e? Adjuk meg az $L_1 + L_2$ egy bázisát! Adjuk meg az $L_1 \bigcap L_2$ egy bázisát!

19) Lineáris alteret alkotnak-e a következő halmazok:

$$L_1 = \{(x_1, x_2, 2x_1, 3x_2) | x_1, x_2 \in R\}$$
$$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$$
$$L_1 \cap L_2 (=?)$$

Amennyiben lineáris altér, adja meg egy bázisát!

5.§ Mátrixok

A második fejezetben már értelmeztük a mátrix, illetve a mátrix főátlójának fogalmát. Most nézzük meg a mátrixokkal végzett műveleteket és ezek tulajdonságait, a mátrix inverzének fogalmát és kiszámításának módjait, és a mátrix rangját. Az alkalmazások között beszélhetünk egy lineáris egyenletrendszer megoldásáról az alapmátrix inverzének kiszámításával, illetve mátrixos egyenletet is látni fogunk.

Definíció: Az $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ mátrix transzponáltja a $A^T = (\alpha_{ji})_{n \times m}$ (ami tulajdonképpen az oszlop- és sorjelleg felcserélését jelenti). (Négyzetes mátrix esetén a főátlóra való tükrözésként is leírhatjuk a transzponálást.)

Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{m \times n}$ két azonos típusú mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy szám. Az A és B mátrixok összege alatt az $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{m \times n}$ mátrixot, az A mátrix λ-szorosa alatt a $\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})_{m \times n}$ mátrixot értjük. (Azt mondhatjuk, hogy a mátrixokat tagonként adjuk össze, a skalárral való beszorzás a mátrix minden tagjának megszorzását jelenti.)

Definíció: Legyen $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ és $B = (\beta_{ij})_{n \times k}$ két mátrix. Az A és B mátrixok szorzata alatt az $A \cdot B = (\gamma_{ij})_{m \times k}$ mátrixot értjük, ahol

$$\gamma_{ij} \doteq \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} \beta_{lj}.$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixnak létezik inverze, ha van olyan $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, hogy

$$AB = BA = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Tétel: Az $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha $detA \neq 0$.

Megjegyzés: Az $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixot regulárisnak nevezzük, ha $detA \neq 0$. (Ellenkező esetben szingulárisnak.)

Az inverz mátrix kiszámításának egy módja:

A mátrix soraival végzett elemi átalakítások:

✓ sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal
✓ egy sorhoz hozzáadni egy másik sor λ szorosát
✓ sorok cseréje

Belátható, hogy ha A egy reguláris mátrix, akkor az $(A|E_n)$ kibővített mátrix soraival végzett elemi átalakítások útján $(E_n|B)$ alakúra hozható, ahol B az A inverze. (Szinguláris mátrix esetén pedig az átalakítás nem végezhető el.)

Jelölés: Az A mátrix inverzét A^{-1}-el jelöljük.

Az inverz mátrix kiszámításának egy másik módja:

Kiszámítjuk a mátrix determinánsát. Ha ez nem nulla, akkor létezik inverz mátrix és minden elemhez felírva a hozzá tartozó algebrai aldeterminánst, A_{ij}-t, majd az így kapott mátrixot transzponálva és beszorozva a $detA$ reciprokával, megkapjuk az A mátrix inverzét.

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{A_{ji}}{detA}$$

Tétel: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$.
a) Ha A és B invertálható, akkor AB is és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
b) $(AB)^T = B^T A^T$;
c) Ha A invertálható, akkor A^T is és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Definíció: Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_s \in V$ vektorok. Az $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ **vektorrendszer rangja** alatt az $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ altér dimenzióját értjük. Jele: $\varrho(a_1, a_2, \ldots, a_s)$

Tétel: Az alábbi átalakítások nem változtatják meg az $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ vektorrendszer rangját:

♡ egy vektor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal

♡ egy vektorhoz hozzáadni egy másik vektor λ-szorosát
♡ olyan vektor elhagyása, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként
♡ vektorok sorrendjének felcserélése

Definíció: Egy $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix rangja alatt a sorvektorrendszerének rangját értjük.

A mátrix rangjának meghatározása: Ranginvariáns átalakításokkal a mátrixot trapéz alakúra hozzuk. (Trapéz alakú egy mátrix, ha $\alpha_{ij} = 0$ ha $i > j$ és $\alpha_{ii} \neq 0$. $(1 \le i \le \min(m,n))$) A 0 sorokat és oszlopokat kihúzhatjuk. Trapéz alakú mátrix rangja megegyezik a sorai számával.

Belátható, hogy a mátrix rangja megegyezik a maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsok közös rendjével.

Feladatok:

1) Adottak a következő mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Végezze el az alábbi műveleteket, amennyiben lehetséges:

$$\begin{aligned} &a) A+B; B+C; C+D; 4A-B;\\ &b) AB; AC; BC; BD;\\ &c) A^T; D^T;\\ &d) \varrho(A); \varrho(D);\\ &e) A^{-1}; D^{-1}. \end{aligned}$$

Megoldás:

a)

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 4A-B = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 10 \\ -12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

A $B+C$ és $C+D$ nem végezhető el, mert nem azonos típusúak.

b) AB nem végezhető el, mert nem teljesül az a feltétel, hogy A oszlopainak száma megegyezzen B sorainak számával.

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 19 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \qquad \varrho(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \varrho(D) = 3$$

e) Az A mátrix nem invertálható, mert nem négyzetes. Most adjuk meg a D inverzét két módszerrel is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 30 & -18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Így

$$D^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A D mátrix inverzének kiszámítása az aldeterminánsok segítségével:

$$det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

és az aldeterminánsok:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$
$$D_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
$$D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

és így az algebrai aldeterminánsok:

$$A_{11} = -2 \qquad A_{12} = -2 \qquad A_{13} = 4$$
$$A_{21} = -1 \qquad A_{22} = -1 \qquad A_{23} = -1$$
$$A_{31} = 1 \qquad A_{32} = -5 \qquad A_{33} = 1$$

ezért

$$D^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Adottak a következő mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1-2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Végezze el az alábbi műveleteket, amennyiben lehetséges:

$$a) A + B; B + C; C + D; 2A - B;$$
$$b) AB; AC; BC; BD;$$
$$c) A^T; D^T;$$
$$d) \varrho(A); \varrho(D);$$
$$e) A^{-1}; D^{-1}.$$

3) Adja meg az X mátrix elemeit, ha

$$X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

Megoldás: Az

$$A \doteq \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B \doteq \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

jelölésekkel a fenti mátrixegyenlet: $XA = B$ az A mátrix inverzével jobbról való beszorzással oldható meg, mely után

$$\begin{aligned} X \cdot A &= B\\ X \cdot A \cdot A^{-1} &= B \cdot A^{-1}\\ X &= B \cdot A^{-1}. \end{aligned}$$

Szükséges tehát az A^{-1} mátrixot meghatározni. Ez a következő lesz:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

4) Adja meg az X mátrix elemeit, ha teljesül a következő egyenlet:

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

5) Adja meg az X mátrix elemeit, ha

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5 & 1 & 6\\ 7 & -8 & 7\\ 6 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

Eredmény:

$$X=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

6)Az inverz mátrix kiszámításának alkalmazásával oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=1\\ 4x-y+2z=2\\ 3x+z=3 \end{array}\right\}$$

Megoldás: A fenti egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

mátrixegyenlettel. Az egyenletrendszer alapmátrixát A-val, az ismeretlenek vektorát $\underline{x}$-el, a szabadtagok vektorát pedig $\underline{b}$-vel jelölve, az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet megoldása:

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Így a megoldás:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -12 \\ z = -9. \end{cases}$$

7)Az inverz mátrix kiszámításának alkalmazásával oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y + 2z = 2 \\ -3x + 10y - 3z = -3 \\ 2x - 3y + 15z = 1 \end{array}\right\}$$

8)Válasszon ki az alábbi vektorrendszerből egy maximális lineárisan függő részrendszert:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9)Válasszon ki az alábbi vektorrendszerből egy maximális lineárisan függő részrendszert:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

10) Megoldható-e az alábbi lineáris egyenletrendszer?

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = -6 \\ -3x + 2y - z = 7 \\ -2x + y + z = -7 \end{array}\right\}$$

Útmutatás: A fenti egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha $\varrho(A) = \varrho(A|b)$.

6.§ Lineáris transzformációk

Definíció: A $\varphi : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ függvényt **lineáris leképezés**nek nevezzük, ha

$$\begin{aligned} &\text{additív: } \varphi(\underline{a}+\underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}) \quad (\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}) \\ &\text{és homogén: } \varphi(\lambda \underline{a}) = \lambda \varphi(\underline{a}) \quad (\underline{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(Megjegyzés: A lineáris leképezések ebben a jegyzetben általában $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ alakúak lesznek.)

Tétel(mátrixreprezentáció): A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés akkor és csak akkor lineáris, ha $\exists A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ úgy, hogy $\varphi(\underline{x}) = A\underline{x}$ $(\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$.

Definíció: Legyen V vektortér. A $\varphi : V \to V$ lineáris leképezéseket lineáris transzformációnak nevezzük. A V-n ható összes lineáris transzformációk halmazát $\mathcal{T}_V$-vel jelöljük.

Definíció: Lineáris formának nevezzük az $f : V \to \mathbb{R}$ alakú lineáris leképezéseket.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés **bilineáris forma**, ha mindkét változójban lineáris, azaz

$$\begin{aligned} &L(\underline{x}+\underline{y}, \underline{z}) = L(\underline{x}, \underline{z}) + L(\underline{y}, \underline{z}) \ (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V) \\ &L(\lambda\underline{x}, \underline{y}) = \lambda L(\underline{x}, \underline{y}) \ (\underline{x}, \underline{y} \in V, \lambda \in \mathbb{R}) \\ &L(\underline{x}, \underline{y}+\underline{z}) = L(\underline{x}, \underline{y}) + L(\underline{x}, \underline{z}) \ (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V) \\ &L(\underline{x}, \lambda\underline{y}) = \lambda L(\underline{x}, \underline{y}) \ (\underline{x}, \underline{y} \in V, \lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Tétel: Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés akkor és csak akkor bilineáris forma, ha (egy adott bázisra vonatkozóan) egyértelműen léteznek olyan $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$ számok, hogy $L(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_i y_k$.

Láthatjuk, hogy $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa esetén $\alpha_{ik} = L(\underline{e}_i, \underline{e}_k)$. Az $A = (\alpha_{ik})$ mátrixot az L bilineáris forma (kanonikus bázisra vonatkozó) mátrixának nevezzük.

Definíció: Az L bilineáris forma **szimmetrikus**, ha $L(\underline{x}, \underline{y}) = L(\underline{y}, \underline{x})$ $(\underline{x}, \underline{y} \in V)$.

Definíció: Legyen L egy szimmetrikus bilineáris forma a V vektortéren. Akkor a $Q(\underline{x}) = L(\underline{x}, \underline{x})$ függvényt kvadratikus formának nevezzük.

Definíció: Azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus forma **pozitív definit**, ha $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$ esetén $Q(\underline{x}) > 0$. Megjegyzés: Q pozitív szemidefinit, ha $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$ esetén $Q(\underline{x}) \geq 0$ és $\exists \underline{y} \neq \underline{0}$, hogy $Q(\underline{y}) = 0$. A negatív definit és negatív szemidefinit fogalmak hasonlóan bevezethetők.

Definíció: Az olyan szimmetrikus bilineáris formát, melyből származó kvadratikus forma pozitív definit, **belső szorzat**nak nevezzük.

Pl.a térben (V^3) a skaláris szorzat egybelső szorzat.

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezést izomorfizmusnak nevezzük, ha az bijektív is. Belátható, hogy két vektortér akkor és csak akkor izomorf egymással, ha dimenziójuk megegyezik:

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow dimV_1 = dimV_2$$

Feladatok:

1) Lineáris-e a következő leképezés? Ha igen, adja meg a mátrixát!

$$\begin{aligned} f_1(\underline{x}) &= 2x_1 + 3x_2 + 5 \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^2) \\ f_2(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^3) \\ f_3(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

Eredmények: Míg az első függvény nem lineáris, addig a másik kettő igen (ellenőrizze a kedves olvasó!) és

$$f_2 \text{ mátrixa } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ f_3 \text{ mátrixa pedig } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Lineáris-e a következő leképezés? Ha igen, adja meg a mátrixát!

$$f_1(\underline{x}) = x_2 + 5x_4 \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^4)$$
$$f_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix} \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^3)$$
$$f_3(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \ (\underline{x} \in \mathbb{R}^2)$$
$$f_4(\underline{x}) = 7\underline{x}(\underline{x} \in \mathbb{R}^4)$$

Eredmény: Itt az f_3 lesz nem lineáris.

3)Ellenőrizze, hogy az alábbi leképezés szimmetrikus-e, bilineáris-e, és ha igen, adja meg a mátrixát $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisában. Majd írja fel a belőle származó kvadratikus formát és ellenőrizze, hogy pozitív definit-e? Amennyiben belső szorzatot értelmez, adja meg az $\underline{a}(1,2,3)$ vektor hosszát a Q által definiált metrikában!

$a)\ L(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$b)\ L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 7x_2y_3 + x_3y_1 + 7x_3y_2 + 20x_3y_3$

$c)\ L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 - 3x_3y_2 + 8x_3y_3$

$d)\ L(\underline{x},\underline{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3$

$e)\ L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 + 2x_1y_3 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 - 3x_3y_2 + 15x_3y_3$

$f)\ L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2 - 4x_2y_3 + 3x_3y_1 - 4x_3y_2 + 12x_3y_3$

$g)\ L(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 6x_2y_3 + 3x_3y_1 - 6x_3y_2 + 9x_3y_3$

Útmutatás: Az utolsó nem lesz pozitív definit.

7.§ Gram-Schmidt féle ortogonalizáció

Definíció: Egy vektorrendszert **ortogonális**nak nevezünk, ha a vektorok páronként merőlegesek egymásra, azaz $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0 \ (i \neq j)$.

Definíció: Egy vektorrendszert **ortonormált**nak nevezünk, ha páronként merőleges egységvektorokból áll, azaz $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0 \ (i \neq j), \ |\underline{v}_i| = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Tétel: Legyen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázisa az E Euklideszi térnek. Ekkor ± 1 szorzótól eltekintve egyértelműen létezik E-ben olyan $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázis, melyre

$$\mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k) = \mathcal{L}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_k). \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Az ortogonalizációs eljárás:

$$\underline{e}_1' \doteq b_1 \qquad \underline{e}_1 \doteq \frac{\underline{e}_1'}{|\underline{e}_1'|}$$

Ha az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_k$ vektorokat már kiszámítottuk, akkor

$$\underline{e}_{k+1}' \doteq \underline{b}_{k+1} - \langle \underline{b}_{k+1}, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1 - \langle \underline{b}_{k+1}, \underline{e}_2 \rangle \underline{e}_2 - \ldots - -\langle \underline{b}_{k+1}, \underline{e}_k \rangle \underline{e}_k, \qquad \underline{e}_{k+1} \doteq \frac{\underline{e}_{k+1}'}{|\underline{e}_{k+1}'|}$$

Feladatok:

1) Legyen $K \doteq \mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$, ahol

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg a K egy ortonormált bázisát!

Eredmény:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2) Legyen $K \doteq \mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$, ahol

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg a K egy ortonormált bázisát!

Eredmény:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Legyen $K \doteq \mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$, ahol

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Adjuk meg a K egy ortonormált bázisát!

Eredmény:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8.§ Sajátérték, sajátvektor

Definíció: Legyen $\varphi \in$. Ha az $\underline{a} \in V$ nemnulla vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\varphi(\underline{a}) = \lambda\underline{a}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\underline{a}$ **sajátvektor**a φ-nek és λ az $\underline{a}$-hoz tartozó **sajátérték**e φ-nek.

Definíció: Legyen $L_\lambda \doteq \{\underline{a} \in V : \varphi(\underline{a}) = \lambda\underline{a}\}$ a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor halmaza.

Egyszerűen látható, hogy L_λ alteret alkot, ezért **a λ-hoz tartozó sajátaltér**nek nevezzük.

A sajátértékek meghatározása:

Definíció: Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja alatt az

$$f(x) \doteq |A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

n-edfokú polinomot értjük.

Definíció: Legyen $\varphi \in$ és legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a φ mátrixa a kanonikus bázisra vonatkozóan. Ekkor φ karakterisztikus polinomja alatt az A mátrix karakterisztikus polinomját értjük.

Definíció: A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot a φ lineáris transzformáció **karakterisztikus gyöké**nek nevezzük, ha λ gyöke a φ karakterisztikus polinomjának.

Tétel: A λ pontosan akkor sajátértéke φ-nek, ha karakterisztikus gyöke φ-nek.

Feladatok:

1)Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Megoldás: A keresett karakterisztikus polinom a következő:

$$f(x) \doteq |A - x \cdot E_n| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5),$$

melynek gyökei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ alkotják a φ sajátértékeinek a halmazát.

Most keressük meg a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - 1 \cdot E_n = \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 3 & 4-1 \end{pmatrix}$$

miatt az

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrenszer megoldásai adják a sajátvektorok koordinátáit. Mivel a Gauss-elimináció során a második egyenletből $0 = 0$ addódik (hiszen lineárisan függött az előbbitől), ezért az $x_2 = t \in \mathbb{R}$ választással az $x_1 = -t$ adódik, így tertszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\underline{v} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor lesz. A megfelelő sajátaltér pedig:

$$L_{\lambda_1} = \{t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Most keressük meg a $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat: az

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrenszer megoldásai: $x_1 = t \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $x_2 = 3t$, így a sajátvektorok a

$$\underline{\mathrm{v}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

alakú számok. Tehát a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$L_{\lambda_2} = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$$

Az L_{λ_1} bázisa egyelemű: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, az L_{λ_2}-é pedig a következő:$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2)Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Útmutatás: Mivel a karakterisztikus polinomnak nincsen valós gyöke, így φ-nek nincs sajátértéke.

3)Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Útmutatás: A karakterisztikus polinomnak ($f(x) = (1-x)^3$) egy valós gyöke van, a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér pedig:

$$L_\lambda = \{t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}.$$

4)Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Útmutatás: A karakterisztikus polinom: $f(x) = (x-3)(-x^2-3)$ (ha problémát okoz egy harmadfokú polinom gyökeinek megkeresése Horner-szabállyal, akkor javasoljuk a determinánd egy alkalmas sor illetve oszlop szerinti kifejtésével való kiszámítását, persze miután elemi átalakítással egy adott sor/oszlop elemeit kinulláztuk.) Ennek egy valós gyöke van, így $\lambda = 3$ az egyetlen sajátérték, és az ehhez tartozó sajátaltér:

$$L_\lambda = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}.$$

5)Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 14 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Megoldás: A sajátértékek: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 5$ és

$$L_{\lambda_1} = \{t \begin{pmatrix} -5 \\ 29 \\ 8 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \quad L_{\lambda_2} = \{t \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \quad L_{\lambda_3} = \{t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}.$$

6)Határozzuk meg a φ sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket, megadva azok egy bázisát, ha φ mátrixa az $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisára vonatkozóan a következő:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Megoldás: A sajátértékek: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ és

$$L_{\lambda_1} = \{t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, u \in \mathbb{R}\} \quad L_{\lambda_2} = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}.$$