1.tétel

1. Operációkutatás története, alkalmazásai

1.1. Történet

A 2. Világháború idején alakult ki:

Szövetségesek létrehoztak egy kutatócsoportot, melynek feladata a hadműveletek eredményes és hatékony irányítása volt. Innen ered az elnevezés:

operáció: hadművelet

1.2. Tulajdonságai:

- alkalmazásorientált
- fejlődését a felmerült gazdasági problémák irányították
- interdiszciplináris

1.3. Hagyományos operációkutatási területek:

- lineáris programozás
- készletgazdálkodás
- hálózati problémák
- **sorbanállási problémák**
- **tömegkiszolgálási problémák**
- **szimuláció**

2. Modellezési eljárás:

1. **probléma verbális megfogalmazása**
   (Elérni kívánt cél, célok megfogalmazása, környezeti elemek, korlátozó tényezők felsorolása)
2. **probléma matematikai megfogalmazása** (Tükrözzék minél hűebben a valóságot, matematikailag, számítástechnikailag kezelhetők legyenek)
3. **megoldó algoritmus keresése és alkalmazása**
   (Ha van ismert matematikai modell, akkor van megoldó algoritmus)
4. **érvényesség-, érzékenységvizsgálat: eredmények elemzése**
   (Matematikai modell általában egyszerűsítést tartalmaz $\Rightarrow$ Eredményt elemezni kell.)
5. **visszacsatolás**
   (Döntés után visszacsatolást kell kérni a döntés utáni helyzetről.)

2.2. Matematikai modellalkotás lépései

1. A vizsgálat tárgyát képező tevékenységet felbontjuk véges sok ún. elemi tevékenységre.

   Definíció. ***Elemi tevékenység:*** *Teljes tevékenységnek az a pontosan körülhatárolt része, melyet már nem szándékozunk tovább bontani:* $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

   (Például a termelési feladatnál három elemi tevékenységre bontottuk a feladatot: asztalgyártás, székgyártás, szekrénygyártás. Lehetne az egyes részére is bontani, de a feladat szövegezése ezt nem teszi szükségessé.)

2. Minden elemi tevékenységhez rendelünk egy pozitív valós számot (nálunk általában egész számot) x_i : **intenzitás** . $E_i \mapsto x_i$ ($x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$).

   (Például x_i a gyártandó termékek száma, általában korlátosak és nem függetlenek egymástól.)

3. **Összefüggések, kapcsolatok keresése.** Összefüggések, kapcsolatok, feltételek.

Definíció. ***Feladat lehetséges megoldása:*** *$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. Ha $\bar{x}$ minden feltételt kielégít.* $\mathcal{L} = \{\bar{x} | \bar{x}$ *lehetséges megoldás* $\}$.

$$\begin{aligned}
&\ell_1 \cdot x_1 + \ell_2 \cdot x_2 + \ell_3 \cdot x_3 \leqq \ell \\
&d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2 + d_3 \cdot x_3 \leqq d \\
&x_i \geqq 0, \quad x_i \in \mathbb{Z} \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

$\mathcal{L} \subset \mathbb{N}^3$.

4. **cél megfogalmazása:** $z : L \to \mathbb{R}$ függvény, amely a lehetséges megoldások "jóságát" elemzi. z: **célfüggvény**. (Amennyiben több célfüggvény is szerepel, többcélú optimalizálásról beszélünk.) (Példánkban $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$.)

Definíció. *A gyakorlati élet problémacsoportjait formálisan leíró modelleket* ***optimumszámítási modellnek*** *nevezzük, amellyek egy feltételrendszerből és egy vagy több célfüggvényből állnak.*

Megjegyzés. *Léteznek programok, melyek a modellalkotást segítik (modeling system).*

2.3. Optimumszámítási modellek osztályozása

1. Elemi függvények intenzitásértékétől függően:
   - folytonos
   - diszkrét
   - vegyes
2. Modellben szereplő paraméterek szerint
   - determinisztikus (paraméterek pontosan megadhatók)
   - sztochasztikus (van olyan paraméter, ami valószínűségi változó)

- Ha a feltételek mindegyike lineáris egyenlőtlenség, vagy egyenlőség, akkor a célfüggvény szerint:
  - **lineáris programozási feladat** (célfüggvény is lineáris),
  - nemlineáris programozási feladat

3. Lineáris programozás

1. *Első feladat*: Eldönteni, hogy van-e megoldása a problémának.
2. *Második feladat*: Hogyan határozzuk meg a megoldásokat!
   - *G. B. Dantzig:* **szimplex módszer** (1951): eljárás eldönti, hogy van-emegoldás és ha van, akkor mik a megoldások,
   - *N. Karmark:* **belső pontos eljárás** (1984): eljárás eldönti, hogy van-emegoldás és ha van, akkor mik a megoldások.

Megjegyzés. *Bizonyos feladattípusokra az egyik, míg másikra amásik eljárás a hatékonyabb.*

3.1. LP-feladatok grafikus megoldása

A 2-dimenziós LP-feladatok egyik megoldási módja azon alapul, hogy az egyenlőtlenség típusú feltételek félsíkokat határoznak meg a síkban. Ezen félsíkok metszete adja a lehetséges megoldások halmazát, amely ismeretében az optimális megoldás meghatározható.

Tekintsük az $ax+by \le c$ egyenlőtlenséggel adott feltételt. Ekkor

- Ha $a>0$, $b=0$, akkor $ax+by \le c \Leftrightarrow x \le \frac{c}{a}$,
- ha $a<0$, $b=0$, akkor $ax+by \le c \Leftrightarrow x \ge \frac{c}{a}$,
- ha $a \ne 0$, $b>0$, akkor $ax+by \le c \Leftrightarrow y \le \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$,
- ha $a \ne 0$, $b<0$, akkor $ax+by \le c \Leftrightarrow y \ge \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$.

A feladat során felírt összes feltétel egy-egy a fentihez hasonló félsíkot definiál. Egy pont akkor és csak akkor elégíti ki az összes feltételt, ha minden az egyenlőtlenségek által meghatározott félsíkon rajta van, azaz ha az illető pont eleme a meghatározott félsíkok metszetének (jelöljük ezt a halmazt $\mathcal{L}$-lel).

A feladat most az, hogy a lehetséges megoldások halmazából ($\mathcal{L}$) kiválasszunk egy olyan pontot, ahol a célfüggvény minimum feladat esetén minimális, maximum feladat esetén maximális.

Célfüggvény geometriai jelentése:

Célfüggvény: $z(x,y) = dx + ey$

Rögzítsünk egy tetszőleges z_0 értéket. Ekkor azon pontok halmaza melyeken a célfüggvény értéke z_0 éppen a $dx+ey=z_0$ egyenes pontjai.

Ha $e \ne 0$, akkor a különböző célfüggvényértékek egy párhuzamos egyenessereget határoznak meg. Ezen egyenesek meredeksége $-\frac{d}{e}$ és az y-tengelyen vett metszetük $\frac{z_0}{e}$.

Ezen egyenesseregből vizsgáljuk azon egyeneseket, melyeknek van közös pontjuk $\mathcal{L}$-lel. Ha $e > 0$, akkor a célfüggvény érték pontosan akkor maximális, ha a tengelymetszet maximális és akkor minimális, ha a temgelymetszet minimális. Negatív e együttható esetén az összefüggés éppen fordított.

1. $\mathcal{L}$ lehetséges megoldások halmaza a $x, y \in \mathbb{Z}$ feltételt figyelmen kívül hagyva konvex sokszög. Igaz-e ez általában?

   Tétel. *$\mathcal{L}$ lehetséges megoldások halmaza egyenes szakaszokkal, esetleg félegyenesekkel határolt zárt konvex halmaz. Ha $\mathcal{L}$ korlátos, akkor konvex sokszög.*

   Bizonyítás. Az egyenlőtlenségek által meghatározott félsíkok zárt, konvex halmazok. Ezek metszete is zárt, konvex, és valóban egyenes szakaszokkal, vagy félegyenesekkel határolódnak el. $\square$

2. Kétdimenziós szemléletből leolvasható további következtetések:
   - $\mathcal{L}$ korlátos $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ konvex sokszög $\Rightarrow$ létezik, optimális megoldás.
   - $\mathcal{L}$ zárt, nem korlátos, véges sok csúccsal, akkor
     - van optimális megoldás, vagy
     - célfüggvény bármilyen kicsi/nagy lehet $\Rightarrow$ nincs optimum.
   - $\mathcal{L} = \emptyset$ $\Rightarrow$ nincs lehetséges megoldás $\Rightarrow$ nincs optimum.

3. Egészértékű feladatoknál nem biztos, hogy a csúcspontok egészértékűek. Ilyenkor kerekíteni szokás. (Nem mindig járható út.)

3.2. LP-feladatok megoldása Fourier módszerrel

A Fourier módszer szintén kisebb feladatok megoldására szolgál:

- Írjuk át a célfüggvényt egyenlőtlenséggé. Például legyen az aktuális célfüggvény $ex + fy = z \rightarrow max$. Ha a z változó értékét tekintjük az optimum értékének, akkor csak az optimális megoldások elégítik ki az $ex + fy \geq z$ egyenlőtlenséget.

- Azon pontok közül melyek kielégítik az új egyenlőtlenségrendszert kell meghatároznunk azt, amelyre a z érték maximális. Ehhez kiválasztunk egy z-től különböző változót (legyen ez x), majd ezt kifejezzük minden egyenlőtlenségből. Az így kapott egyenlőtlenségek két csoportba sorolhatók. ($x \leqq$ többi változótól függő kifejezés, $x \geqq$ többi változótól függő kifejezés)

- Az első csoport minden egyenlőtlenségét párosítsuk a második csoport minden egyenlőtlenségével, ilymódon küszöböljük ki a rendszerből az x változót.

- Az eljárást addig folytatjuk, amíg a rendszerben egyetlen változó, a (z) marad.

- Így z-re alsó és felső korlátok kaphatók, melyek megadják az optimum értékét.

- Ezt visszahelyettesítjük a korábbi egyenlet-rendszerekbe, megkapjuk az optimális megoldást.

2.tétel

3.3. Lineáris programozás elméleti alapjai

3.3.1. LP feladatok ekvivalens alakjai

Definíció. *Egy LP-feladat* ***standard alakú****, ha*

- *feltételrendszere csak* $\leq$ *relációkat tartalmaz*
- *a változók csak nemnegatív értékeket vehetnek fel*
- *a célfüggvény maximumát keressük.*

Matematikai jelölésekkel: $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leqq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leqq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & \leqq & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leqq & b_m \\ \multicolumn{9}{c}{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0} \\ \hline \multicolumn{9}{c}{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = z \to max} \end{array}$$

Mátrixok, vektorok segítségével:

$$\begin{array}{cccl} \mathbf{A}\underline{x} & \leq & b & \qquad (\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{m\times n}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m) \\ \underline{x} & \geq & \theta_n & \\ \hline \underline{c}\cdot\underline{x} & = & z & \to max \qquad (\underline{c} \in \mathbb{R}^n) \end{array}$$

Tétel. *Minden LP-feladat standard alakúra hozható.*

Bizonyítás.

- A maximum és minimum feladatok közül elég csak a maximum feladatokkal foglalkozni, mert $\max\{z(\underline{x})|\underline{x} \in \mathcal{L}\}$ pontosan akkor létezik, ha $\min\{-z(\underline{x})|\underline{x} \in \mathcal{L}\}$ létezik, és

$$\min\{z(\underline{x})|\underline{x} \in \mathcal{L}\} = -\max\{-z(\underline{x})|\underline{x} \in \mathcal{L}\}$$

  és $-z$ maximum helye megegyezik z minimum helyével.

- Az egyenlőtlenségek mindegyike $\leq$ alakra hozható:
  - Ha egy feltételben fordított irányú egyenlőtlenség szerepel, azaz

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geqq b_i,$$

    akkor mindkét oldalt -1-gyel beszorozva az egyenlőtlenség iránya megfordul:

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leqq -b_i.$$

  - Ha egy feltételben egyenlőség szerepel, azaz

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i,$$

    akkor azt helyettesíthetjük két egyenlőtlenséggel:

$$\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leqq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geqq b_i. \end{array}$$

– Ha van olyan változó a modellben, melyre

- $x_j \geqq d$ ($d \in \mathbb{R}$) a feltétel, akkor $x'_j := x_j - d$ új változót bevezetve x'_j-re már az $x'_j \geqq 0$ feltételnek kell teljesülnie,
- $x_j \leqq e$ ($e \in \mathbb{R}$) a feltétel, akkor $x'_j := e - x_j$ új változót bevezetve x'_j-re már az $x'_j \geqq 0$ feltételnek kell teljesülnie,
- $x_j \in \mathbb{R}$ a feltétel, azaz x_j **előjelkötetlen**, akkor $x'_j := x_j^+$, $x''_j := x_j^-$ [1] új változókat bevezetve, x'_j, x''_j-re már az $x'_j, x''_j \geqq 0$ feltételnek kell teljesülnie. Az feltételrendszerbe $x_j = x'_j - x''_j$-t írunk.

□

Definíció. *Egy LP-feladat **kanonikus alakú**, ha*

- *feltételrendszere csak = relációkat tartalmaz*
- *a változók csak nemnegatív értékeket vehetnek fel*
- *a célfüggvény maximumát keressük.*

Matematikai jelekkel:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{A}\underline{x} & = & b & \qquad (\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{m\times n}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m) \\ \underline{x} & \geq & \underline{\theta}_n & \\ \hline \underline{c}\cdot\underline{x} & = & z & \to max \qquad (\underline{c} \in \mathbb{R}^n) \end{array}$$

Tétel. *Minden standard feladat kanonikus alakúra hozható.*

Bizonyítás. Egy standard feladat feltételrendszerét úgy hozhatjuk kanonikus alakra, hogy a $\leq$ feltételek baloldalához $u_i \geq 0$
textbftextitkiegészítő változókat adunk.[2] Tehát ebben az esetben új változót vezetünk be.□

Definíció. *A kiegészítő és a többletváltozót összefoglaló néven **eltérésváltozóknak** nevezzük.*

3.3.2. LP feladatok algebrai és geometriai háttere

Definíció. *Az $\boldsymbol{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ feltételt kielégítő $\underline{x}$ vektort a kanonikus alakú feladat **megoldásá**nak nevezzük. Ha $\underline{x} \geq \underline{\theta}$ kikötés is teljesül, akkor az $\underline{x}$-et **lehetséges megoldás**nak nevezzük. Egy $\underline{x}$ lehetséges megoldás akkor **optimális**, ha nincs nála nagyobb (minimumfeladat esetén kisebb) célfüggvényértékkel rendelkező lehetséges megoldás.*

Tétel. *Egy LP-feladat standard alakjának és kanonikus alakjának lehetséges megoldásai kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetők egymásnak.*

---

[1]Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor

$$a^+ := \begin{cases} a, & \text{ha} \quad \mathrm{a} \geq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad \mathrm{a} < 0, \end{cases} \qquad a^- := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \mathrm{a} \geq 0, \\ -a, & \text{ha} \quad \mathrm{a} < 0, \end{cases}$$

az a szám **pozitív** illetve **negatív része**.

[2]Ha nem standard feladatból indulunk ki, akkor előfordulhat a $\geq$ feltétel, e feltétel baloldalából $v_i \geq 0$ ***többletváltozót*** vonunk ki.

Bizonyítás. A standard feladat egy lehetséges megoldását a feltételekbe helyettesítve a többlet- és kiegészítőváltozók értéke egyértelműen kiszámítható, a kanonikus alakú feladat egy lehetséges megoldásából a többlet és kiegészítőváltozók értékeit elhagyva egyértelmű módon megkapjuk a standard feladat egy lehetséges megoldását. □

Következmény. *Mivel a standard és a kanonikus feladat célfüggvénye azonos, ezért ha a kanonikus feladat egy lehetséges megoldása optimális is, akkor a neki megfeleltetett standard-megoldás szintén optimális és viszont.*

Az $\mathbf{A}\cdot\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszer megoldása:

Legyen az $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix teljes sorrangú, azaz $\rho(\mathbf{A})=m$. Ekkor $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közül kiválasztható egy $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ mátrix, amelynek oszlopvektorai az $\mathbf{A}$ oszlopvektorterének bázisát alkotják, azaz $\mathbf{B}$ nem szinguláris mátrix.

Feltehető, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix első m oszlopa került a $\mathbf{B}$ mátrixba (ha nem így lenne, akkor megfelelő oszlop illetve sorcserékkel ez elérhető).

Legyen tehát az $\mathbf{A}$ mátrix particionálva: $\mathbf{A}=[\mathbf{B},\mathbf{N}]$. Ennek megfelelően az $\underline{x}$ megoldás is felbontható: $\underline{x}=\begin{bmatrix}\underline{x}_B\\ \underline{x}_N\end{bmatrix}$. Így a kanonikus feladat feltételrendszere az alábbi alakba írható:

$$\mathbf{B}\cdot\underline{x}_B+\mathbf{N}\cdot\underline{x}_N=\underline{b}. \quad \overset{\det\mathbf{B}\neq 0}{\Leftrightarrow} \underline{x}_B+\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{N}\cdot\underline{x}_N=\mathbf{B}^{-1}\cdot\underline{b},$$

amelyből $\underline{x}_B$ kifejezhető:

$$\underline{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\cdot\underline{b}-\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{N}\cdot\underline{x}_N.$$

Az $\underline{x}_N$ nembázis-változók mindegyikének 0 értéket adva a feladat egy ***bázismegoldásához*** jutunk. Ha a nembázisváltozókon kívül még legalább egy bázisváltozó is 0, akkor a bázismegoldást **degeneráltnak** nevezzük.

Megjegyzés. *Minden bázishoz ($\mathbf{B}$), pontosan egy bázismegoldás tartozik. Tehát a bázismegoldások számának maximuma:* $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

3.tétel

1. Tétel. *Egy* $\underline{x} \in \mathcal{L}$ *pont akkor és csak akkor csúcspontja* $\mathcal{L}$*-nek, ha az* $\boldsymbol{x}$ *pozitív komponenseinek megfelelő* A*-beli oszlopvektorok lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás.

- Tegyük fel, hogy $\underline{x} \in \mathcal{L}$ csúcs. Indirekt módon bizonyítunk. Tehát feltételezzük, hogy $\underline{x}$ pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorok lineárisan függők.

  Feltehetjük, hogy $\underline{x}$ első k komponense pozítiv. Particionáljuk $\underline{x}$-et és ennek megfelelően $\mathbf{A}$-t:

$$\underline{x} = [\underline{\overline{x}}, \underline{\theta}_{n-k}] \qquad \mathbf{A} = [\overline{\mathbf{A}}, \mathbf{O}_{m\times(n-k)}]$$

  Ekkor

$$\mathbf{A}\underline{x} = \overline{\mathbf{A}}\underline{\overline{x}} + \mathbf{O}_{m\times(n-k)}\underline{\theta}_{n-k} = \underline{b}.$$

Az indirekt feltevésből következik, hogy $\overline{\mathbf{A}}$ oszlopvektorai lineárisan függők. $\Rightarrow$

$$\exists \underline{d} \neq \underline{\theta}_k : \quad \overline{\mathbf{A}}\underline{d} = \underline{\theta}_m,$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{\mathbf{A}}(\underline{\overline{x}} \pm \varepsilon \underline{d}) = \overline{\mathbf{A}}\underline{\overline{x}} \pm \varepsilon \overline{\mathbf{A}}\underline{d} = \overline{\mathbf{A}}\underline{\overline{x}} = \underline{b} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

Így minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\underline{u} := [\underline{\overline{x}} + \varepsilon \underline{d}, \underline{\theta}_{n-k}] \in \mathcal{L}, \quad \underline{v} := [\underline{\overline{x}} - \varepsilon \underline{d}, \underline{\theta}_{n-k}] \in \mathcal{L},$$

továbbá

$$\underline{x} = \frac{\underline{u} + \underline{v}}{2},$$

azaz $\underline{x}$ $\mathcal{L}$-beli szakasz felezőpontja. Ez ellentmondás, hiszen $\underline{x}$ csúcs.

- Most feltesszük, hogy $\underline{x}$ pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorok ($\overline{\mathbf{A}}$ oszlopvektorai) lineárisan függetlenek, de $\underline{x}$ nem csúcs.

  Ez azt jelenti, hogy

$$\exists \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{L}, \quad \underline{u} \neq \underline{v}, \quad \lambda \in (0{,}1) : \quad \underline{x} = \lambda \underline{u} + (1-\lambda)\underline{v}$$

  Mivel

$$\underline{x}, \underline{u} \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(\underline{x} - \underline{u}) = \mathbf{A}\underline{x} - \mathbf{A}\underline{u} = \underline{b} - \underline{b} = \underline{\theta}_m,$$

  Továbbá

$$\underline{x} = [\underline{\overline{x}}, \underline{\theta}_{n-k}] \quad \lambda, (1-\lambda) > 0 \quad \underline{u}, \underline{v} \geq \underline{\theta}_n, \quad \underline{x} = \lambda \underline{u} + (1-\lambda)\underline{v}$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{u}, \underline{v} \quad \text{utolsó} \quad n-k \quad \text{komponense} \quad 0.$$

  Ezért

$$\overline{\mathbf{A}}(\underline{\overline{x}} - \underline{\overline{u}}) = \mathbf{A}(\underline{x} - \underline{u}) = \underline{\theta}_m,$$

  azaz $\overline{\mathbf{A}}$ oszlopvektorai összefüggők, hiszen van nem triviális megoldása ($\underline{\overline{x}} - \underline{\overline{u}} \neq \underline{\theta}_k$) az

$$\overline{\mathbf{A}}\underline{y} = \underline{\theta}_m, \quad (\underline{y} \in \mathbb{R}^k)$$

  egyenletrendszernek. Ez ellentmondás.

□

1. Következmény. *Egy $\underline{x} \in \mathcal{L}$ pont akkor és csak akkor csúcspontja $\mathcal{L}$ halmaznak, ha az $\underline{x}$ lehetséges bázismegoldása az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek. ($\underline{x} \in \mathcal{L}$ csúcspont $\Leftrightarrow$ $\underline{x}$ lehetséges bázismegoldása az $\boldsymbol{A}\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek.)*

2. Következmény. *$\mathcal{L}$ halmaznak véges sok csúcsa van. Csúcspontok maximális száma: $\binom{n}{m}$.*

2. Tétel. *Ha egy kanonikus alakú LP-feladatnak van optimális megoldása, akkor a lehetséges megoldások halmazának van legalább egy optimális csúcsa.*

3. Következmény. *Ha a kanonikus alakú LP-feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális bázismegoldása is.*

3. Tétel. *Az optimális megoldások minden konvex lineáris kombinációja is optmális megoldás.*

5.tétel

4. A szimplex módszer

4.1. LP feladatok további osztályozása

- ***Normál feladat***: Olyan standard alakú feladat, melyben a feltételek jobboldalán nem negatív számok állnak.
- ***Módosított normál feladat***: A feltételek jobboldalán nemnegatív számok állnak és előfordul benne = reláció is.
- ***Általános alakú feladat***: A feltételek jobboldalán nemnegatív számok állnak, és szerepel benne $\geq$ reláció is.

4.2. Normál feladatok megoldása

Definíció. *Egy LP-feladatot normál feladatnak nevezünk, ha*

- *feltételrendszere csak $\leq$ relációkat tartalmaz*
- *a változók csak nemnegatív értékeket vehetnek fel*
- *a célfüggvény maximumát keressük.*
- *a feltételek jobboldalán csak nemnegatív konstansok lehetnek.*

A normál feladat kanonikus alakját a következőképpen is felírhatjuk:

$$\max z$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
-c_1x_1 & - & \dots & - & c_nx_n & +z & & & & & & = & 0 \\
a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & & + & u_1 & & & & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & & & + & u_2 & & & = & b_2 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & & & & & + & u_m & = & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m \geq 0$$

- egyenletek száma: $m+1$
- változók száma: $m+n+1$

Az előző egyenletrendszernek a következő koordinátatábla felel meg:

	x_1	$\dots$	x_r	$\dots$	x_n	z	u_1	$\dots$	u_k	$\dots$	u_m	
z	$-c_1$	$\dots$	$-c_r$	$\dots$	$-c_n$	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
u_1	a_{11}	$\dots$	a_{1r}	$\dots$	a_{1n}	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$
u_k	a_{k1}	$\dots$	a_{kr}	$\dots$	a_{kn}	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	b_k
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mr}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	0		1	b_m

Itt a vektorok helyett a nekik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető változókat tüntettük fel.

Egy lehetséges bázismegoldás:

$$z = 0, \quad \underline{u} = \underline{b}, \quad \underline{x} = \underline{\theta}_n$$

Most a célfüggvényérték nulla, tehát biztosan nem optimális a megoldás. Próbálunk áttérni más bázisra.

Legyen $a_{kr} \neq 0$ **pivot-elem**. $\underline{a}_r$ vektort visszük $\underline{e}_k$ helyett a bázisba:

$$\underline{a}_r = -c_r \underline{e}_0 + a_{1r}\underline{e}_1 + \ldots + a_{kr}\underline{e}_k + \ldots + a_{mr}\underline{e}_m \tag{1}$$

$$\underline{b} = 0\underline{e}_0 + b_1\underline{e}_1 + \ldots + b_k\underline{e}_k + \ldots + b_m\underline{e}_m \tag{2}$$

Kifejezzük (1)-ből $\underline{e}_k$-t:

$$\underline{e}_k = \frac{c_r}{a_{kr}}\underline{e}_0 - \frac{a_{1r}}{a_{kr}}\underline{e}_1 - \ldots - \frac{a_{(k-1)r}}{a_{kr}}\underline{e}_{k-1} + \frac{1}{a_{kr}}\underline{a}_r - \frac{a_{(k+1)r}}{a_{kr}}\underline{e}_{k+1} - \ldots - \frac{a_{mr}}{a_{kr}}\underline{e}_m,$$

és behelyettesítjük (2)-be:

$$\underline{b} = b_k\frac{c_r}{a_{kr}}\underline{e}_0 + \left(b_1 - b_k\frac{a_{1r}}{a_{kr}}\right)\underline{e}_1 + \ldots + \left(b_{k-1} - b_k\frac{a_{(k-1)r}}{a_{kr}}\right)\underline{e}_{k-1} + \frac{b_k}{a_{kr}}\underline{a}_r +$$
$$\left(b_{k+1} - b_k\frac{a_{(k+1)r}}{a_{kr}}\right)\underline{e}_{k+1} + \ldots + \left(b_m - b_k\frac{a_{mr}}{a_{kr}}\right)\underline{e}_m,$$

Új koordináta-tábla:

	$\ldots$	$\ldots$	x_r	$\ldots$	$\ldots$	z	u_1	$\ldots$	u_k	$\ldots$	u_m	
z	$\ldots$	$\ldots$	0	$\ldots$		1	0	$\ldots$	$\frac{c_r}{a_kr}$	$\ldots$	0	$b_k\frac{c_r}{a_{kr}}$
u_1	$\ldots$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\ldots$	0	1	$\ldots$	$-\frac{a_{1r}}{a_kr}$	$\ldots$	0	$b_1 - b_k\frac{a_{1r}}{a_{kr}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$
x_r	$\ldots$	$\ldots$	1	$\ldots$	$\ldots$	0	0	$\ldots$	$\frac{1}{a_kr}$	$\ldots$	0	$\frac{b_k}{a_{kr}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_m	$\ldots$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\ldots$	0	0	$\ldots$	$-\frac{a_{mr}}{a_kr}$		1	$b_m - b_k\frac{a_{mr}}{a_{kr}}$

Fölösleges oszlopok is vannak, amelyek nem változnak. Ezeket elhagyjuk:
Egyszerűsített tábla (Szimplex tábla):

	x_1	$\ldots$	x_n	z	u_1	$\ldots$	u_m	
z	$-c_1$	$\ldots$	$-c_n$	1	0	$\ldots$	0	0
u_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	0	1	$\ldots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$	0	$\vdots$
u_m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	1	b_m

$\Rightarrow$

	x_1	$\ldots$	x_n	
z	$-c_1$	$\ldots$	$-c_n$	0
u_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}	b_m

Redukált pivot algoritmus:

- A pivot elem helyére a reciprokát írjuk,
- a pivot elem sorában minden elemet elosztunk a pivot elemmel,
- a pivot elem oszlopában minden elemet elosztunk a pivot elemmel és vesszük az ellentettjét,

- a többi elemet úgy számoljuk, mint a báziscserénél (*téglalap-szabály:* pivot-elemet nem tartalmazó átlók szorzatát osztom a pivot elemmel, és ezt kivonom a negyedik csúcsnál lévő számból.)

A nembázisváltozók értéke minden lépésben 0, a bázisváltozók értékét a redukált szimplex-tábla utolsó oszlopából olvashatjuk ki.

Könnyen látható, hogy a jobb felső sarokban lévő elem a célfüggvény aktuális értékét adja.

Célunk bázistranszformációval olyan új bázisra áttérni, amelyhez szintén lehetséges bázismegoldás tartozik és a célfüggvény értéke nagyobb. A bázistranszformáció során az új bázisvektor oszlopában eltárolhatjuk a bázisból kikerülő vektor új bázisra vonatkozó koordinátáit.

Pivot elem kiválasztása során két feltételre kell figyelnünk:

- Lehetséges megoldáshoz szeretnénk jutni, azaz minden bázisváltozó nem-negatív értékű legyen.
- A célfüggvény értéke ne csökkenjen.

Mivel lehetséges megoldásból lehetséges megoldást szeretnénk előállítani, ezért $b_i \geq 0$ és $b_i' \geq 0$ $(1 \leq i \leq m)$. Tegyük fel, hogy az a_{kr} elemet választottuk pivot elemnek. Ekkor a $b_k' = \frac{b_k}{a_{kr}}$ elem pontosan akkor nemnegatív, ha $a_{kr} > 0$. Tetszőleges $i \neq k$ index esetén

$$b_i' = b_i - \frac{a_{ir}}{a_{kr}} \cdot b_k = \left(\frac{b_i}{a_{ir}} - \frac{b_k}{a_{kr}} \right) \cdot a_{ir} \geq 0,$$

ami akkor teljesül, ha $\frac{b_i}{a_{ir}} \geq \frac{b_k}{a_{kr}}$ minden i-re teljesül, azaz

$$\frac{b_k}{a_{kr}} = \min_{i:a_{ir}>0} \frac{b_i}{a_{ir}}.$$

Ezt a pivotelem választási stratégiát a ***szűk keresztmetszet szabályá***nak nevezzük.

A célfüggvényértéke a szimplex-lépés előtt legyen z (az első lépés előtt természetesen $z = 0$), a szimplex-lépés után pedig z'.

$$z' = z - \frac{b_k}{a_{kr}} \cdot (-c_r) \geq z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_k}{a_{kr}} \cdot c_r \geq 0$$

Mivel a korábbiakban már megállapítottuk, hogy $\frac{b_k}{a_{kr}} > 0$, ezért szükségszerűen $c_r > 0$. Azaz negatív célsorelem alatt választunk pivot elemet.

A pivot elem választásának szabályai:

- Olyan oszlopban választjuk a pivot elemet ahol a célsor eleme negatív
- Pozitív számot választunk pivot elemnek
- A kiválasztott oszlop pozitív elemeivel osszuk el az utolsó oszlop megfelelő elemeit és azt a számot választjuk pivot elemnek, amelyre ez a hányados a legkisebb

A negatív célelemű oszlopok közül az alábbiak alapján választhatunk:

- A legnagyobb abszolútértékű negatív célelem oszlopából választunk, `vagy`
- Minden negatív célelemű oszlopban határozzuk meg a pivot elemet és számítsuk ki a célfüggvény növekedését. Válasszuk azt az oszlopot, amelynél a növekedés a legnagyobb `vagy`

- Könnyebb számolás érdekében olyan oszlopot választunk, ahol pivot elem 1-nek adódik. vagy

- Könnyebb számolás érdekében olyan oszlopot választunk, ahol pivot elem sorában vagy oszlopában 0-t, vagy 0-kat találunk.

Példa:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 20 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 26 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 18 \\ & & x_1, x_2, x_3 & & & \geq & 0 \\ \hline & & \multicolumn{5}{l}{3x_1+4x_2+x_3 = z \to max} \end{array}$$

4.2.1. A szimplex algoritmus algebrai háttere

Legyen az LP-feladat:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}\underline{x}+\mathbf{E}\underline{u} & = & \underline{b} \qquad (\mathbf{A}\in\mathcal{M}^{m\times n}, \mathbf{E}\in\mathcal{M}^{m\times m}, \underline{x}\in\mathbb{R}^n, \underline{b}, \underline{u}\in\mathbb{R}^m) \\ \underline{x}\geq\underline{\theta}_n, & & \underline{u}\geq\underline{\theta}_m \\ \hline \underline{c}\cdot\underline{x} & = & z\longrightarrow \max \qquad (\underline{c}\in\mathbb{R}^n) \end{array}$$

alakú. A célfüggvény értékét z új változónak tekintjük, és megoldjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{lcl} z - \underline{c}\underline{x} & = & 0 \qquad (\underline{c}\in\mathbb{R}^n) \\ \mathbf{A}\underline{x} + \mathbf{E}\underline{u} & = & \underline{b} \quad (\mathbf{A}\in\mathcal{M}^{m\times n}, \mathbf{E}\in\mathcal{M}^{m\times m}, \underline{x}\in\mathbb{R}^n, \underline{b}, \underline{u}\in\mathbb{R}^m) \\ \underline{x}\geq\underline{\theta}_n, \quad \underline{u}\geq\underline{\theta}_m \quad z\geq 0 \end{array}$$

Az egyenletrendszer felírható

$$\widetilde{\mathbf{A}}\cdot\widetilde{\underline{x}} = \widetilde{\underline{b}}$$

alakban, ahol

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -\underline{c} & \underline{\theta}_m \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad \widetilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} z \\ \underline{x} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \quad \widetilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszerhez tartozó induló szimplex-tábla:

	$\underline{x}$	
z	$-\underline{c}$	0
$\underline{u}$	$\mathbf{A}$	$\underline{b}$

A táblához tartozó bázis:

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{\theta}_m \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Legyen az $\mathbf{A}\in\mathcal{M}^{m\times n}$ mátrix ismét teljes sorrangú, azaz $\rho(\mathbf{A}) = m$. Ekkor az $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ mátrix is teljes sorranggú lesz. Tehát $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ oszlopvektorai közül kiválasztható egy $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ mátrix, amelynek oszlopvektorai az $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ oszlopvektorterének bázisát alkotják, azaz $\mathbf{B}$ nem szinguláris mátrix.

Oszlopcserékkel elérjük, hogy az $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ mátrix első m oszlopa kerüljön a $\mathbf{B}$ mátrixba.

Legyen tehát a mátrix particionálva: $[\mathbf{A},\mathbf{E}] = [\mathbf{B},\mathbf{N}]$. Ennek megfelelően az $\underline{x}$ megoldás is felbontható: $\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix}$. ($\underline{x}_B\in\mathbb{R}^m$, $\underline{x}_N\in\mathbb{R}^n$). Továbbá ennek megfelelően

$$[\underline{c}, \underline{\theta}_m] = [\underline{c}_B, \underline{c}_N].$$

Az új egyenletrendszerünk bázisába nyilván bekerül a z-hez tartozó egységvektor is. A transzformált táblához tartozó bázis:

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -\underline{c}_B \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

A bázis inverze pedig:

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix},$$

mely egyszerűen igazolható:

$$\widetilde{\mathbf{B}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\underline{c}_B \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1} - \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{(m+1)\times(m+1)},$$

Most véve az

$$\widetilde{\mathbf{A}} = [\widetilde{\mathbf{B}}, \widetilde{\mathbf{N}}] \quad \widetilde{\underline{x}} = [\widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{B}}, \widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{N}}]$$

particionálást, kapjuk, hogy

$$\widetilde{\mathbf{B}} \cdot \widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{B}} + \widetilde{\mathbf{N}} \cdot \widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{N}} = \widetilde{\underline{b}}. \quad \overset{\det \widetilde{\mathbf{B}} \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{B}} + \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{N}} \cdot \widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{N}} = \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \widetilde{\underline{b}},$$

amelyből $\widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{B}}$ kifejezhető:

$$\widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{B}} = \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \widetilde{\underline{b}} - \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{N}} \cdot \widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{N}}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\widetilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -\underline{c}_N \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad \widetilde{\underline{x}}_{\widetilde{B}} = \begin{bmatrix} z \\ \underline{x}_B \end{bmatrix} \quad \widetilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix},$$

kapjuk, hogy

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \widetilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\underline{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\underline{b} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \underline{\theta}_m^T & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\underline{c}_N \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{c}_N + \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix}$$

Beírva a kapott eredményeket a szimplex-táblába kapjuk, hogy

	$\underline{x}_N$	
z	$-\underline{c}_N + \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\underline{b}$
$\underline{x}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\underline{b}$

Ezen eredményeket felhasználva könnyen igazolható az alábbi két tétel.

4. Tétel. *Ha a szimplex tábla célsorában nincs negatív elem, akkor a táblához tartozó lehetséges bázismegoldás optimális.*

Bizonyítás. Az $\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\underline{x}} = \widetilde{\underline{b}}$ egyenlet bázismegoldása:

$$\widetilde{\underline{x}} = [z, \mathbf{B}^{-1}\underline{b}, \underline{\theta}_n].$$

A bázismegoldáshoz tartozó célfüggvényérték:

$$z = \underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\underline{b}$$

A célfüggvényt általános esetben a

$$\begin{aligned} z &= \underline{c}_B \underline{x}_B + \underline{c}_N \underline{x}_N = \underline{c}_B \cdot (\mathbf{B}^{-1}\underline{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\underline{x}_N) + \underline{c}_N \underline{x}_N = \\ &= \underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\underline{b} - (\underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \underline{c}_N)\underline{x}_N \end{aligned}$$

képlettel számolhatjuk ki(, melyet a szimplex táblából is kiolvashatunk). Az LP feladat feltételeiből következik, hogy $\underline{x}_N \geq \underline{\theta}_n$, a tétel feltételéből pedig következik, hogy $\underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \underline{c}_N \geq \underline{\theta}_n$. Ezért $\underline{x}_N$ értékét akárhogyan választjuk,

$$z \leq \underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\underline{b}$$

egyenlőtlenség teljesül, tehát $\underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\underline{b}$ valóban a legnagyobb célfüggvény-érték. □

5. Tétel. *Ha a szimplex tábla célsorában olyan negatív szám áll, melynek oszlopában nincs pozitív szám, akkor a célfüggvény felülről nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \underline{c}_N$ j. ($1 \leq j \leq n$) koordinátája negatív. Jelöljük ezt $\widehat{c}_j$-vel, továbbá $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ j. oszlopát jelöljük $\underline{\widehat{a}}_j$-vel. A tétel feltételei szerint:

$$\widehat{c}_j < 0, \qquad \underline{\widehat{a}}_j \leq \underline{\theta}_m.$$

Válasszuk a nembázisváltozókat a j. koordinátán kívül mind nullának, a j.-et pedig egy pozitív valós számnak, azaz

$$\underline{x}_N := [0{,}0, \ldots ,0, \underbrace{d}_{j.} ,0, \ldots ,0] \quad d \in \mathbb{R}^+$$

Ekkor

- $[\underline{x}_B, \underline{x}_N]$ lehetséges megoldás, mert $\underline{x}_N \geq \theta_n$ és

$$\underline{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\underline{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\underline{x}_N = \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\underline{b}}_{\geq \underline{\theta}_m} - \underbrace{d}_{>0} \underbrace{\underline{\widehat{a}}_j}_{\leq \underline{\theta}_m} \geq \underline{\theta}_m$$

- A célfüggvény értéke pedig:

$$z = \underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\underline{b} - (\underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \underline{c}_N)\underline{x}_N = \underline{c}_B \mathbf{B}^{-1}\underline{b} - \underbrace{\underbrace{\widehat{c}_j}_{<0} \underbrace{d}_{>0}}_{>0}$$

  tetszőleges nagy lehet d választásával.□

1. Megjegyzés. *A két tétel egyikénél sem lett kihasználva, hogy* $\underline{b} \geq \underline{\theta}_m$.

6. Tétel. *Ha degeneráció nem fordul elő, akkor a normál feladat induló táblájából az ismertetett algoitmussal véges számú lépésben elő lehet állítani azt a szimpley táblát, amely vagy tartalmaz optimális megoldást, vagy jelzi, hogy a célfüggvény nem korlátos a lehetséges pontok halmazán.*

Bizonyítás. Ha nincs degeneráció, akkor $\underline{b} > \underline{\theta}_m$. A szimplex transzformáció a csúcsokon megy végig. Véges sok csúcs van, $\underline{b} > \underline{\theta}_m$ feltétel miatt minden csúcsot legfeljebb egyszer érint, ezért véget ér az algoritmus véges sok lépésben.□

2. Megjegyzés.
- *Ha a szimplex tábla utolsó oszlopába* 0 *kerül, akkor ez okozhat végtelen ciklust. Ennek kiküszöbölésére vannak további algoritmusok.*

- ***Minimum feladatok megoldása:***
  - *Célfüggvényt megszorozzuk (-1)-gyel és a maximumot keressük.*
  - *Célsorban a pozitív értékek oszopában keresünk a szűk keresztmetszet szabálya alapján pozitív pivot-elemet.*

Összegezve:
Az algoritmus végetér:

- ha a célfüggvény sorában nincs negatív elem, ekkor az optimális megoldás és a hozzátartozó célfüggvényérték a táblából kiolvasható
- ha a negatív célelemek oszlopaiban nincs pozitív elem, ilyenkor a célfüggvény a lehetséges megoldások halmazán tetszőlegesen nagy értéket felvehet
- Bizonyos esetekben végtelen ciklusra vezet az algoritmus. Az ilyen esetek akkor léphetnek fel, ha a pivot elem sorában az utolsó oszlopban 0 áll.

6.tétel

4.2.2. Alternatív optimumok keresése

A maximumfeladatnak akkor lehet több optimális megoldása (alternatív optimumok), ha az optimális szimplextábla célsora nullát is tartalmaz. Ekkor az alábbi esetek lehetségesek

1. Ha a nulla célelem alatt van pozitív szám és előállítható egy újabb, az előzőtől különböző bázismegoldás, akkor a feladatnak végtelensok optimuma van és azok az optimumok konvex lineáris kombinációiként állíthatók elő. (A konvex lineáris kombináció olyan lineáris kombináció, melyben az együtthatók nem-negatívak és összegük 1.)
2. Ha a célsor 0 eleme alatt van pozitív szám, de a degeneráció miatt nem állítható elő új optimális bázismegoldás (a pivot elem sorában a jobboldalon 0 áll), akkor nincs alternatív optimum.
3. Ha a célsor 0 eleme alatt nincs pozitív szám, akkor az optimális megoldások halmaza nem korlátos.

4.2.3. A szimplex módszer geometriai háttere

A szimplex módszerrel a kanonikus alakú feladat lehetséges bázismegoldásainak egy olyan sorozatát állítjuk elő, hogy a megfelelő célfüggvényértékek sorozata maximumfeladat esetén monoton nemcsökkenő, minimumfeladat esetén pedig monoton nemnövekvő. Az egymást követő bázisok csak egy vektorban különböznek.

A kanonikus alakú feladat lehetséges bázismegoldásai a lehetséges bázismegoldások halmazának csúcspontjai, így a probléma geometriai interpretációja a következő:

Az $\mathcal{L}$ konvex poliéder csúcspontjain mozgunk. Mindig olyan szomszédos csúcspontra igyekszünk, melyben a célfüggvény értéke nagyobb, de legalábbis nem kisebb az előzőnél. Az eljárás akkor fejeződik be, ha már nincs nagyobb célfüggvényértéket adó csúcs, vagy nyílvánvaló, hogy a célfüggvény nem korlátos $\mathcal{L}$-en.

4.3. Módosított normál feladat megoldása

1. Definíció. *Egy LP-feladatot módosított normál feladatnak nevezünk, ha*

- *feltételrendszerében biztosan van* $=$ *reláció, de nincs* $\geq$ *reláció*
- *a változók csak nemnegatív értékeket vehetnek fel*
- *a célfüggvény maximumát keressük.*
- *a feltételek jobboldalán csak nemnegatív konstansok lehetnek.*

Tegyük fel, hogy egy módosított normál feladat első k db feltétele $\leq$ relációt tartalmaz, a többi pedig egyenlet. Ekkor a kanonikus alakú feladat feltételrendszerét a célfüggvénnyel kiegészítve az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
-c_1\cdot x_1 & - & c_2\cdot x_2 & - & \dots & - & c_n\cdot x_n & + & z & & & & & = & 0\\
a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\cdot x_n & & & + & u_1 & & & = & b_1\\
a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\cdot x_n & & & & + & u_2 & & = & b_2\\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots\\
a_{k1}\cdot x_1 & + & a_{k2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{kn}\cdot x_n & & & & & + & u_k & = & b_k\\
a_{k+1,1}\cdot x_1 & + & a_{k+1,2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{k+1,n}\cdot x_n & & & & & & & = & b_{k+1}\\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots\\
a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{mn}\cdot x_n & & & & & & & = & b_m
\end{array}$$

A fenti egyenletrendszer abban különbözik a normál feladat egyenletrendszerétől, hogy az itt az együttható mátrixnak csak $k+1$ egységvektora van. A kiinduló táblához szükségünk van az egységvektorokból álló triviális bázisra. Ezt úgy tudjuk biztosítani, hogy a egyenlőség feltételek baloldalához úgynevezett mesterséges kiegészítő változókat adunk. Könnyen látható, hogy az új egyenletrendszer egy bázismegoldása csak akkor megoldása az eredeti feladatnak, ha a mesterséges kiegészítő változók értéke mind nulla.

Tehát a módosított normál feladat az alábbi formában írható: $\underline{c},\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ $\underline{b}_1\in\mathbb{R}^k$, $\underline{b}_2\in\mathbb{R}^{m-k}$, $\mathbf{A}_1\in\mathcal{M}^{k\times n}$, $\mathbf{A}_2\in\mathcal{M}^{(m-k)\times n}$.

$$\begin{array}{rll}
\max\ z & =\underline{c}\cdot\underline{x} & \\
\mathbf{A}_1\underline{x} & \leq\underline{b}_1, & \underline{b}_1\geq\underline{\theta}_k\\
\mathbf{A}_2\underline{x} & =\underline{b}_2, & \underline{b}_2\geq\underline{\theta}_{m-k}\\
\underline{x} & \geq\underline{\theta}_n &
\end{array}$$

A fenti feladat kanonikus alakját úgy kapjuk, hogy a $\leq$ feltételek baloldalához $\underline{u}_1\geq\underline{\theta}_k$ kiegészítőváltozókat adunk.:

$$\begin{array}{rll}
\max z & =\underline{c}\cdot\underline{x} & \\
\mathbf{A}_1\underline{x}+E_1\underline{u}_1 & =\underline{b}_1, & \underline{b}_1\geq\underline{\theta}_k\\
\mathbf{A}_2\underline{x} & =\underline{b}_2, & \underline{b}_2\geq\underline{\theta}_{m-k}\\
\underline{x} & \geq\underline{\theta}_n,\ \underline{u}_1 & \geq\underline{\theta}_k
\end{array}$$

Az eredetileg is egyenlőségként megadott feltételek baloldalához is mesterséges kiegészítő-változókat adva tudjuk biztosítani a triviális bázis létezését. ($\underline{\overline{u}}_2$) Másodlagos célfüggvényt vezetünk be:

$$\overline{z}:=\underline{1}\cdot\underline{\overline{u}}_2,\quad \underline{1}:=(1,\dots,1)$$

Célunk $\overline{z}$ minimumát megtalálni. Ha $\min\overline{z}=0$ ($\overline{z}\geq\underline{\theta}_{m-k}$), akkor mivel $\underline{\overline{u}}_2\geq\underline{\theta}_{m-k}$, ezért $\underline{\overline{u}}_2=\underline{\theta}_{m-k}$, akkor ki tudtuk küszöbölni a mesterséges változókat.

Ezek után a következő koordináta tábla írható fel:

	$\underline{x}$	z	$\underline{u}_1$	$\overline{\underline{u}}_2$	$\overline{z}$	
z	$-\underline{c}$	1	$\underline{\theta}_k^T$	$\underline{\theta}_{m-k}^T$	0	0
$\underline{u}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\underline{\theta}_k$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{O}$	$\underline{\theta}_k$	$\underline{b}_1$
$\overline{\underline{u}}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\underline{\theta}_{m-k}$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{E}_2$	$\underline{\theta}_{m-k}$	$\underline{b}_2$
$\overline{z}$	$\underline{\theta}_n^T$	0	$\underline{\theta}_k^T$	$-\underline{1}$	1	0

Ha a mesterséges kiegészítő változókat tartalmazó egyenletek összegét hozzáadjuk a másodlagos célfüggvénynek megfelelő egyenlethez, akkor az $\overline{\underline{u}}_2$, $\overline{\underline{u}}_3$ vektorok oszlopában már egységvektorok fognak állni:

	$\underline{x}$	z	$\underline{u}_1$	$\overline{\underline{u}}_2$	$\overline{z}$	
z	$-\underline{c}$	1	$\underline{\theta}_k^T$	$\underline{\theta}_{m-k}^T$	0	0
$\underline{u}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\underline{\theta}_k$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{O}$	$\underline{\theta}_k$	$\underline{b}_1$
$\overline{\underline{u}}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\underline{\theta}_{m-k}$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{E}_2$	$\underline{\theta}_{m-k}$	$\underline{b}_2$
$\overline{z}$	$\underline{1}\cdot\mathbf{A}_2$	0	$\underline{\theta}_k^T$	$\underline{\theta}_{m-k}^T$	1	$\underline{1}\cdot\underline{b}_2$

Így felírható az alábbi redukált tábla:

	$\underline{x}$	
z	$-\underline{c}$	0
$\underline{u}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\underline{b}_1$
$\overline{\underline{u}}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\underline{b}_2$
$\overline{z}$	$\underline{1}\cdot\mathbf{A}_2$	$\underline{1}\cdot\underline{b}_2$

ÖSSZEGEZVE, a módosított normálfeladatot az alábbi **kétfázisú módszerrel** oldjuk meg:

1. fázis: A mesterséges eltérésváltozókhoz tartozó vektorokat megkíséreljük kivinni a bázisból, hogy kapjunk egy lehetséges megoldást a kiinduló feladatra. Ha ez nem sikerül, akkor nincs lehetséges megoldása a feladatnak.

2. fázis: A normál feladat algoritmusával előállítjuk az optimális megoldást, vagy kimutatjuk, hogy a célfüggvény tetszőlegesen nagy értékeket felvehet.

Az első fázisban kitűzött célt úgy érjük el, hogy egy másodlagos célfüggvényt készítünk, amely a mesterséges kiegészítőváltozók összegéből áll és először ennek a célfüggvénynek keressük a minimumát. Mivel a mesterséges kiegészítőváltozók is csak nemnegatív értékeket vehetnek fel, így a másodlagos célfüggvény optimális értéke nulla vagy valamilyen pozitív érték.

- Ha ez az érték nem nulla, akkor nincs lehetséges megoldása az eredeti feladatnak,
- ha nulla, akkor ez csak úgy lehet, ha minden mesterséges kiegészítőváltozó nulla, és így van lehetséges megoldása a megoldandó feladatnak.
  - Ha az eljárás végére minden mesterséges kiegészítő változót sikerült kihozni a bázisból, akkor a továbbiakban a normál feladat megoldásához hasonlóan járunk el, hogy az elsődleges célfüggvény maximumát meghatározzuk.

- Ha maradt a bázisban mesterséges kiegészítő változó, – ami csak úgy lehet, ha a változó degeneráció miatt 0 értéket vesz fel – akkor az alábbi két módszer valamelyikével ezek a változók is kihozhatók a bázisból:
  a) Ha a mesterséges kiegészítő változó sorában választható – nem feltétlenül pozitív, de nullától különböző – pivot elem, akkor elemi bázistranszformációval a mesterséges változó lecserélhető.
  b) Ha a mesterséges kiegészítő változó sorában csak 0 elemek vannak, akkor a sor az egyenletrendszerből elhagyható.

3. Megjegyzés. *Ha az elsődleges célfüggvény optimalizálása során valamely mesterséges kiegészítő változót sikerül kihozni a bázisból, nem kell meghatároznunk az új bázisra vonatkozó koordinátáit, hiszen nem akarjuk újra bázisváltozóvá tenni, ezért az ő oszlopát elhagyjuk.*

5. Példa. *Oldjuk meg az alábbi módosított normál-feladatot szimplex algoritmussal!*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & - & x_2 & + & & + & x_4 & \leq & 50 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 14 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{9}{c}{4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = z \to max} \end{array}$$

6. Példa. *Oldjuk meg az alábbi módosított normál-feladatot szimplex algoritmussal!*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & - & x_2 & + & & + & x_4 & \leq & 50 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 14 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{9}{c}{4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = z \to max} \end{array}$$

7. Példa. *Oldjuk meg az alábbi módosított normál-feladatot szimplex algoritmussal!*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & - & x_2 & + & & + & x_4 & \leq & 50 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 14 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 14 \\ & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{9}{c}{4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = z \to max} \end{array}$$

4.4. Általános alakú feladat megoldása

Definíció. *Egy LP-feladatot általános alakú feladatnak nevezünk, ha*

- *feltételrendszerében biztosan van $\geq$ reláció*
- *a változók csak nemnegatív értékeket vehetnek fel*
- *a célfüggvény maximumát keressük.*
- *a feltételek jobboldalán csak nemnegatív konstansok lehetnek.*

Tehát az általános alakú feladat az alábbi formában írható

$$\begin{array}{rcll} \max\ z & = & \underline{c}\cdot\underline{x} & \underline{c},\underline{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{A}_1\underline{x} & \leq & \underline{b}_1, & \underline{b}_1\geq\underline{\theta}_k \\ \mathbf{A}_2\underline{x} & = & \underline{b}_2, & \underline{b}_2\geq\underline{\theta}_\ell \qquad k+\ell+s=n \\ \mathbf{A}_3\underline{x} & \geq & \underline{b}_3, & \underline{b}_3\geq\underline{\theta}_s \\ \underline{x} & \geq & \underline{\theta}_n & \end{array}$$

A fenti feladat kanonikus alakját úgy kapjuk, hogy a $\leq$ feltételek baloldalához $u_i\geq 0$ kiegészítőváltozókat adunk, a $\geq$ feltételek baloldalából pedig $v_i\geq 0$ többletváltozókat vonunk ki:

$$\begin{array}{lcccll} \max\ z & & & = & \underline{c}\cdot\underline{x}, & \underline{c},\underline{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{A}_1\underline{x} & + & \mathbf{E}_1\underline{u}_1 & = & \underline{b}_1, & \underline{b}_1\geq\underline{\theta}_k \\ \mathbf{A}_2\underline{x} & & & = & \underline{b}_2, & \underline{b}_2\geq\underline{\theta}_\ell \qquad k+\ell+s=n \\ \mathbf{A}_3\underline{x} & & -\ \mathbf{E}_3\underline{v}_3 & = & \underline{b}_3, & \underline{b}_3\geq\underline{\theta}_s \\ \underline{x}\geq\underline{\theta}_n, & & \underline{u}_1\geq\underline{\theta}_k, \quad \underline{v}_3\geq\underline{\theta}_s & & & \end{array}$$

Az eredetileg is egyenlőségként megadott feltételek és a $\geq$ feltételekből kapott egyenletek baloldalához is mesterséges kiegészítőváltozókat adva tudjuk biztosítani a triviális bázis létezését.

Ezek után a következő koordináta tábla írható fel:

	$\underline{x}$	$\underline{v}_3$	z	$\underline{u}_1$	$\overline{\underline{u}}_2$	$\overline{\underline{u}}_3$	$\overline{z}$	
z	$-\underline{c}$	$\underline{\theta}^T$	1	$\underline{\theta}^T$	$\underline{\theta}^T$	$\underline{\theta}^T$	0	0
$\underline{u}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{O}$	$\underline{\theta}$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{O}$	$\underline{\theta}$	$\underline{b}_1$
$\overline{\underline{u}}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{O}$	$\underline{\theta}$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{O}$	$\underline{\theta}$	$\underline{b}_2$
$\overline{\underline{u}}_3$	$\mathbf{A}_3$	$-\mathbf{E}_3$	$\underline{\theta}$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{E}_3$	$\underline{\theta}$	$\underline{b}_3$
$\overline{z}$	$\underline{\theta}^T$	$\underline{\theta}^T$	0	$\underline{\theta}^T$	$-\underline{1}$	$-\underline{1}$	1	0

Ha a mesterséges kiegészítő változókat tartalmazó egyenletek összegét hozzáadjuk a másodlagos célfüggvénynek megfelelő egyenlethez, akkor az $\overline{\underline{u}}_2$, $\overline{\underline{u}}_3$ vektorok oszlopában már egységvektorok fognak állni, így felírható az alábbi redukált tábla:

	$\underline{x}$	$\underline{v}_3$	
z	$-\underline{c}$	$\underline{\theta}^T$	0
$\underline{u}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{O}$	$\underline{b}_1$
$\overline{\underline{u}}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{O}$	$\underline{b}_2$
$\overline{\underline{u}}_3$	$\mathbf{A}_3$	$-\mathbf{E}_3$	$\underline{b}_3$
$\overline{z}$	$\underline{1}\cdot\mathbf{A}_2+\underline{1}\cdot\mathbf{A}_3$	$-\underline{1}\cdot\mathbf{E}_3$	$\underline{1}\cdot\underline{b}_2+\underline{1}\cdot\underline{b}_3$

A másodlagos célfüggvény megint a mesterséges kiegészítő változók összege. A megoldást most is két fázisban végezzük.

7. tétel

4.5. Hiperbolikus programozási feladat megoldása szimplex módszerrel

Definíció. *Egy feladatot* ***hiperbolikus programozási feladat****nak (HP feladat) nevezzük, ha a feltételrendszere ugyanaz, mint az LP-feladatok feltételrendszezere, célfüggvénye pedig két lineáris függvény hányadosa. Tehát a HP feladat az alábbi formában írható*

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{A}\underline{x} & \leq & \underline{b}, & \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^{m\times n},\ \ \underline{b} \in \mathbb{R}^m, \\ \underline{x} & \geq & \underline{\theta}_n & \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \hline \max\ z & = & \frac{\underline{c}\cdot\underline{x}+c_0}{\underline{d}\cdot\underline{x}+d_0} & \underline{c}, \underline{d}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, c_0, d_0 \in \mathbb{R} \end{array} \tag{3}$$

Elnevezések:

- $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, c_i *: fajlagos nyereség [Ft/db]* $(i = 1, \dots, n)$,
- c_0 *termelési szinttől független nyereség,*
- $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, d_i *: munkaigényességi együttható [óra/db]* $(j = 1, \dots, n)$,
- d_0 *fix időszükséglet.*

HP feladat megoldásához az alábbi plusz **feltételeket** teljesülését követeljük meg:

- $\mathcal{L}$ korlátos halmaz.
- $\underline{d}\cdot\underline{x}+d_0 > 0\ \forall \underline{x} \in \mathcal{L}$

Megpróbáljuk a (3) HP feladatot visszavezetni egy LP feladatra.

- Bevezetünk egy új változót: $t > 0$
- A (3) HP feladat célfüggvényét bővítjük t-vel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$z = \frac{\underline{c}\cdot\underline{x}+c_0}{\underline{d}\cdot\underline{x}+d_0} = \frac{t\underline{c}\cdot\underline{x}+c_0 t}{t\underline{d}\cdot\underline{x}+d_0 t} = \frac{\underline{c}\cdot(t\underline{x})+c_0 t}{\underline{d}\cdot(t\underline{x})+d_0 t}.$$

Ha az $[\underline{x}, t]$ vektort olyannak választjuk, melyre

$$\underline{d}\cdot(t\underline{x})+d_0 t = 1, \tag{4}$$

akkor $t\underline{x} =: \underline{y}$ jelölés bevezetésével a célfüggvény lineáris lesz, nevezetesen

$$z = \underline{c}\cdot\underline{y}+c_0 t. \tag{5}$$

- (3) feltételrendszerét is t-vel beszorozva kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{A}\underline{x} & \leq & \underline{b}, & /\cdot t \\ \mathbf{A}t\underline{x} & \leq & t\underline{b}, & /t\underline{x} = \underline{y} \\ \mathbf{A}\underline{y} & \leq & t\underline{b}, & /-t\underline{b} \\ \mathbf{A}\underline{y}-t\underline{b} & \leq & \underline{\theta}_m, & \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{rcll} \underline{x} & \geq & \underline{\theta}_n, & /\cdot t \\ t\underline{x} & \geq & \underline{\theta}_n, & /t\underline{x} = \underline{y} \\ \underline{y} & \geq & \underline{\theta}_n, & \\ & & , & \end{array} \tag{6}$$

Tehát (4), (6), (5) alapján az így generált LP-feladat:

$$\begin{array}{rcccc} \mathbf{A}\underline{y}-t\underline{b} & \leq & \underline{\theta}_m, & \mathbf{A}\in\mathcal{M}^{m\times n},\ \ \underline{b}\in\mathbb{R}^m, \\ \underline{y}\geq\underline{\theta}_n & & t\geq 0 & \underline{y}\in\mathbb{R}^n, \\ \underline{d}\cdot\underline{y}+d_0t & = & 1, & \underline{d}\in\mathbb{R}^n, d_0\in\mathbb{R} \\ \hline \max\ z & = & \underline{c}\cdot\underline{y}+c_0t & \underline{c},\underline{y}\in\mathbb{R}^n, c_0\in\mathbb{R} \end{array} \tag{7}$$

A következő tételekben megnézzük, hogy mi a kapcsolat a két feladat megoldáshalmaza és optimum-értéke között.

7. Tétel. *A (7) LP feladat minden megengedett $[\underline{y},t]$ értékére t pozitív ($t>0$).*

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van van $[\underline{y},0]\in\mathcal{L}^{LP}$ pont. Ekkor

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}\underline{y} & \leq & \underline{\theta}_m \\ \underline{d}\cdot\underline{y} & = & 1 \end{array}$$

teljesül. Tekintsük az $\underline{x}+\lambda\underline{y}$ ($\lambda\in\mathbb{R}^+$) vektort, ahol $\underline{x}\in\mathcal{L}^{HP}$. Vizsgáljuk meg, hogy $\underline{x}+\lambda\underline{y}\in\mathcal{L}^{HP}$ mikor teljesül!

$$\mathbf{A}(\underline{x}+\lambda\underline{y})=\mathbf{A}\underline{x}+\lambda(\mathbf{A}\underline{y})\overset{\mathbf{A}\underline{y}\leq\underline{\theta}_m}{\leq}\mathbf{A}\underline{x}\overset{\underline{x}\in\mathcal{L}^{HP}}{\leq}\underline{b}$$

Mivel minden $\lambda\in\mathbb{R}^+$ esetén $\underline{x}+\lambda\underline{y}\geq\underline{\theta}_n$ is teljesül, ezért

$$\underline{x}+\lambda\underline{y}\in\mathcal{L}^{HP}\qquad\forall\lambda\in\mathbb{R}^+.$$

Ez ellentmond annak, hogy $\mathcal{L}^{HP}$ korlátos halmaz. □

8. Tétel. *Létezik $\mathcal{L}^{HP}$ és $\mathcal{L}^{LP}$ között bijekció.*

Bizonyítás. Legyen $[\underline{y},t]\in\mathcal{L}^{LP}$ és $\underline{x}:=\frac{\underline{y}}{t}$. (Mivel az előző tétel miatt $t>0$, így ez értelmezett művelet.) Kérdés: $\underline{x}\overset{?}{\in}\mathcal{L}^{HP}$:

$$\mathbf{A}\underline{x}=\mathbf{A}\frac{\underline{y}}{t}=\frac{1}{t}(\mathbf{A}\underline{y})\overset{(7)}{\leq}\frac{1}{t}(t\underline{b})=\underline{b},$$

továbbá

$$\underline{y}\geq\underline{\theta}_n,\quad t>0\quad\Rightarrow\quad\underline{x}\geq\underline{\theta}_n,$$

tehát $\underline{x}\in\mathcal{L}^{HP}$ teljesül.

Megfordítva, legyen $\underline{x}\in\mathcal{L}^{HP}$ tetszőleges. Ekkor

$$t:=\frac{1}{\underline{d}\cdot\underline{x}+d_0},\qquad\qquad \underline{d}\cdot\underline{x}+d_0>0$$

választásával legyen

$$\underline{y}:=t\underline{x}$$

.

Kérdés: $[\underline{y},t] \overset{?}{\in} \mathcal{L}^{LP}$:

$$\mathbf{A}\underline{y}-t\underline{b}=\mathbf{A}(t\underline{x})-t\underline{b}=t(\mathbf{A}\underline{x})-t\underline{b}=\underbrace{t}_{>0}\underbrace{(\mathbf{A}\underline{x}-\underline{b})}_{\leq\underline{\theta}_m}\overset{(3)}{\leq}\underline{\theta}_m,$$

továbbá

$$\underline{x}\geq\underline{\theta}_n,\quad t>0 \quad\Rightarrow\quad \underline{y}\geq\underline{\theta}_n,$$

tehát $[\underline{y},t]\in\mathcal{L}^{LP}$ teljesül. Mivel mindkét irányban a hozzárendelés egyértelmű volt, ezzel állításunkat bebizonyítottuk. □

9. Tétel. *Ha $[\underline{y}^*,t^*]\in\mathcal{L}^{LP}$ optimális megoldása a a (7) LP feladatnak, akkor $\underline{x}^*{:=}\frac{\underline{y}^*}{t^*}\in\mathcal{L}^{HP}$ optimális megoldása a (3) HP feladatnak. És az optimum értékek megegyeznek.*

Bizonyítás. Legyen $[\underline{y},t]\in\mathcal{L}^{LP}$ egy lehetséges megoldása a a (7) LP feladatnak. A célfüggvény értéke az előző tétel bizonyításában nyert kapcsolat alapján

$$z=\underline{c}\cdot\underline{y}+c_0t=\underline{c}\cdot\frac{\underline{x}}{\underline{d}\cdot\underline{x}+d_0}+c_0\frac{1}{\underline{d}\cdot\underline{x}+d_0}=\frac{\underline{c}\cdot\underline{x}+c_0}{\underline{d}\cdot\underline{x}+d_0},$$

tehát a célfüggvényértékek megegyeznek az egymásnak megfeleltetett pontokban, így az optimumhelyeken is. □

8.tétel

---

5. Dualitás

5.1. A duál feladat fogalma

Minden LP feladathoz (P) egyértelműen tudunk rendelni egy másik LP feladatot, az ún duál feladatot (D)!

$$(\mathrm{P})\longmapsto(\mathrm{D})$$

A duál feladat szerepe:

- Duál feladat segítségével el lehet dönteni egy $\underline{x}\in\mathcal{L}^{(\mathrm{P})}$ lehetséges pontról, hogy optimális-e.
- Néha a duál feladatot könnyebb megoldani.
- Duál feladat optimális megoldása fontos gazdasági jelentéssel bír.

Példa. Tekintsük az alábbi normál alakú LP-feladatot!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 10 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 30 \\ & & & x_1, & x_2, x_3 & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{7}{c}{4x_1+x_2+3x_3 = z \rightarrow \max} \end{array}$$

Az egyenlőtlenségből leolvasható, hogy [0,0,30] egy lehetséges megoldás ($[0,0,30] \in \mathcal{L}$). Ehhez a lehetséges ponthoz tartozó célfüggvényérték: $z = 0+0+3\cdot 30 = 90$, így

$$\max z \geq 90$$

egyenlőtlenség teljesül. Tehát találtunk egy alsó korlátot. Felső korlátot is találhatunk:

$$4x_1+x_2+3x_3 \leq 2\cdot(x_1+4x_2)+3\cdot(3x_1-x_2+x_3) \leq 20+90 = 110,$$

tehát 110 egy jó felső korlát:

$$90 \leq \max z \leq 110.$$

Keressünk kisebb felő korlátot!

$$z = 4x_1+x_2+3x_3 \leq y_1\cdot(x_1+4x_2)+y_2(3x_1-x_2+x_3) \leq y_1\cdot 10+y_2\cdot 30,$$

ahol

$$\begin{array}{rcrcr} y_1 & + & 3y_2 & \geq & 4 \\ 4y_1 & - & y_2 & \geq & 1 \\ & & y_2 & \geq & 3 \\ & & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ha a legkisebb felső korlátot keressük, akkor az alábbi LP feladatot kell megoldanunk:

$$\begin{array}{rcrcr} y_1 & + & 3y_2 & \geq & 4 \\ 4y_1 & - & y_2 & \geq & 1 \\ & & y_2 & \geq & 3 \\ & & y_1, y_2 & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{5}{c}{10y_1+30y_2 = w \rightarrow \min} \end{array}$$

Ezt a feladatot hívjuk az eredeti feladat duáljának.

2. Definíció. *Standard alakú LP-feladat* ***duál feladata****:*

$$\left.\begin{array}{rcr} \boldsymbol{A}\underline{x} & \leq & \underline{b} \\ \underline{x} & \geq & \underline{0}_n \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underline{c}\cdot\underline{x} = z \rightarrow \max} \end{array}\right\} (P) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcr} \underline{y}\boldsymbol{A} & \geq & \underline{c} \\ \underline{y} & \geq & \underline{0}_m \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underline{y}\cdot\underline{b} = w \rightarrow \min} \end{array}\right\} (D)$$

Megjegyezzük, hogy érvényes a $(\underline{y}\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\underline{y}$ egyenlőség, és inkább a második feltétel transzponáltját szokás a feladatokban felírni.

10. Tétel. *A (D) duál feladat duálja a (P) primál feladat.*

Bizonyítás. Írjuk át a definícióban szereplő (D) duál feladatot standard alakúra és vegyük annak duáltját.

$$\left.\begin{array}{lcl} (-\mathbf{A}^T)\underline{y} & \leq & -\underline{c}^T \\ \underline{y} & \geq & \underline{\theta}_m \\ \hline \multicolumn{3}{l}{\underline{y}\cdot(-\underline{b}) = (-\underline{b})^T\cdot\underline{y} = -w \to \max} \end{array}\right\}\text{(P)} \quad \stackrel{def}{\Rightarrow} \quad \left.\begin{array}{lcl} \underline{x}(-\mathbf{A}^T) & \geq & (-\underline{b})^T \\ \underline{x} & \geq & \underline{\theta}_n \\ \hline \multicolumn{3}{l}{\underline{x}\cdot(-\underline{c})^T = -\underline{c}\cdot\underline{x} = -z \to \min} \end{array}\right\}\text{(D)}$$

Ha az első feltételnek vesszük a transzponáltját és beszorozzuk az egyenlőtlenséget (-1)-gyel, akkor visszakapjuk az eredeti standard alakú feladat feltételrendszerét. A célfüggvény sorának (-1)-gyel való beszorzásával pedig a célfüggvényt is megkapjuk. $\square$

A (P)-(D) primál-duál feladatpár értelmezhető más LP-feladatokra is.

	(P)	(D)	
célfüggvény	maximum feladat	minimum feladat	célfüggvény
feltételek	$\leq b_i$ $= b_i$ $\geq b_i$	$y_i \geq 0$ y_i előjelkötetlen $y_i \leq 0$	változók
változók	$x_j \geq 0$ x_j előjelkötetlen $x_j \leq 0$	$\geq c_j$ $= c_j$ $\leq c_j$	feltételek

A táblázatban szereplő átírási szabályokat könnyen ellenőrizhetjük. Az alábbi példában megmutatjuk az ellenőrzést.

5.2. Dualitási tételek

Ebben a fejezetben a standard alakú primál feladat és annak duálisának optimális megoldásai között keresünk kapcsolatot.

5.2.1. Gyenge dualitási tétel

11. Tétel. GYENGE DUALITÁSI TÉTEL *Ha* $\underline{x}$ *a* (P) *primál,* $\underline{y}$ *pedig a duál* (D) *feladat egy lehetséges megoldsa, akkor* $\underline{c} \cdot \underline{x} \leq \underline{y} \cdot \underline{b}$*, azaz a duál feladat minden egyes célfüggvény-értéke nagyobb a primál feladat összes célfüggvény-értékénél.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{x} \in \mathcal{L}^{(P)}$, $\underline{y} \in \mathcal{L}^{(D)}$ tetszőleges. Ekkor:

$$\underbrace{\underline{y}}_{\geq \underline{\theta}_m} \cdot / \quad \mathbf{A}\underline{x} \leq \underline{b} \qquad\qquad \underline{y}\mathbf{A} \geq \underline{c} \quad / \cdot \underbrace{\underline{x}}_{\geq \underline{\theta}_n}$$

$$\underline{y}\mathbf{A}\underline{x} \leq \underline{y} \cdot \underline{b} \qquad\qquad \underline{y}\mathbf{A}\underline{x} \geq \underline{c} \cdot \underline{x} \qquad ,$$

$$\Downarrow$$

$$z = \underline{c} \cdot \underline{x} \leq \underline{y}\mathbf{A}\underline{x} \leq \underline{y} \cdot \underline{b} = w$$

amivel az állításunkat bebizonyítottuk. $\square$

4. Következmény. *Ha $\underline{x}^*$ a (P) primál, $\underline{y}^*$ pedig a duál (D) feladat egy lehetséges megoldása és $\underline{c}\cdot\underline{x}^* = \underline{y}^*\cdot\underline{b}$, akkor $\underline{x}^*$ a primál, $\underline{y}^*$ pedig a duál feladat egy-egy optimális megoldása.*

Bizonyítás. A gyenge dualitási tételből (11. tétel) következik, hogy

$$\underline{c}\cdot\underline{x} \le \underline{y}\cdot\underline{b}, \quad \forall\underline{x}\in\mathcal{L}^{(P)}, \forall\underline{y}\in\mathcal{L}^{(D)} \tag{8}$$

Legyen először $\underline{x} := \underline{x}^*$. Ekkor

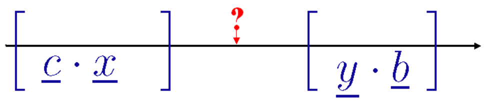
$$\underline{y}^*\cdot\underline{b} = \underline{c}\cdot\underline{x}^* \le \underline{y}\cdot\underline{b}, \quad \forall\underline{y}\in\mathcal{L}^{(D)},$$

azaz $\underline{y}^*$ a duál feladatnak optimális megoldása, a célfüggvény értéke itt minimális. Legyen (8)-ban $\underline{y} := \underline{y}^*$. Ekkor

$$\underline{y}^*\cdot\underline{b}\underline{c}\cdot\underline{x}^* \ge \underline{c}\cdot\underline{x}, \quad \forall\underline{x}\in\mathcal{L}^{(P)},$$

azaz $\underline{x}^*$ a primál feladatnak optimális megoldása, a célfüggvény értéke itt maximális. $\square$

Kérdés, hogy vannak-e olyan pontok, ahol a célfüggvényértékek megegyeznek? Elképzelhető-e, hogy nincs ilyen pont?



Erre ad választ az erős dualitási tétel.

5.2.2. Erős dualitási tétel

12. Tétel. ERŐS DUALITÁSI TÉTEL

(a) Ha a $(P)-(D)$ primál-duál pár valamelyikének van optimális megoldása, akkor van a duál párnak is megoldása, és

$$\max\{\underline{c}\cdot\underline{x} | \underline{x}\in\mathcal{L}^{(P)}\} = \min\{\underline{y}\cdot\underline{b} | \underline{y}\in\mathcal{L}^{(D)}\}.$$

(b) Ha a $(P)-(D)$ primál-duál pár valamelyikének célfüggvénye nem korlátos a lehetséges pontok halmazán, akkor a duál párnak nincs lehetséges megoldása.

Bizonyítás. Induljunk ki az alábbi primál-duál párból!

$$\left.\begin{array}{lcr} \mathbf{A}\underline{x} & \le & \underline{b} \\ \underline{x} & \ge & \underline{\theta}_n \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underline{c}\cdot\underline{x} = z \to \max} \end{array}\right\} (\mathrm{P}) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{lcr} \underline{y}\mathbf{A} & \ge & \underline{c} \\ \underline{y} & \ge & \underline{\theta}_m \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underline{y}\cdot\underline{b} = w \to \min} \end{array}\right\} (\mathrm{D})$$

(a) Tegyük fel, hogy a primál feladatnak van optimális megoldása. Írjuk fel a primál feladat kanonikus alakját és a hozzá tartozó duál párt.

$$\left.\begin{array}{llcc} \underline{c}_B\cdot\underline{x}_B & + \ \underline{c}_N\cdot\underline{x}_N & = & z \\ \mathbf{B}\underline{x}_B & + \ \mathbf{N}\underline{x}_N & = & \underline{b} \\ \underline{x}_B\geq\underline{\theta}_m, & \quad\ \underline{x}_N & \geq & \underline{\theta}_n, \end{array}\right\}(\overline{P}) \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{lcc} \underline{y}\cdot\underline{b} & = & w \\ \underline{y}\mathbf{B} & \geq & \underline{c}_B \\ \underline{y}\mathbf{N} & \geq & \underline{c}_N \\ \underline{y} & \in & \mathbb{R}^m \end{array}\right\}(\overline{D}),$$

ahol $\mathbf{B}$ a $(\overline{P})$ optimális bázisa. Írjuk fel az optimális szimplex táblát!

	$\underline{x}_N$	
z	$-\underline{c}_N+\underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\underline{b}$
$\underline{x}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\underline{b}$

Ekkor $\underline{y}:=\underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\in\mathcal{L}^{(\overline{D})}$, mert

- $\underline{y}\mathbf{B}=(\underline{c}_B\mathbf{B}^{-1})\mathbf{B}=\underline{c}_B\geq\underline{c}_B$
- $\underline{y}\mathbf{N}=\underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\geq\underline{c}_N$, mert $-\underline{c}_N+\underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\geq\underline{\theta}_n$ (A tábla optimális, célsorában nincs negatív elem.)

A célfüggvény értéke pedig:

$$w=\underline{y}\cdot\underline{b}=\underline{c}_B\mathbf{B}^{-1}\cdot\underline{b}=z,$$

tehát a 8. következmény miatt a duál feladatnak is van optimuma, és az optimumértékek megegyeznek. //(a)

(b) Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy (P) célfüggvénye felülről nem korlátos és a duális feladatnak van lehetséges megoldása, azaz $\mathcal{L}^{(D)}\neq\emptyset$, és így létezik $\underline{y}\in\mathcal{L}^{(D)}$. Ekkor a gyenge dualitási tétel (11. tétel) miatt

$$\underline{c}\cdot\underline{x}\leq\underline{y}\cdot\underline{b}\quad\forall\underline{x}\in\mathcal{L}^{(P)},$$

ami ellentmond annak, hogy a (P) feladat célfüggvénye felülről nem korlátos. Hasonlóan igazolható az az eset is, ha a duál feladat célfüggvénye nem korlátos alulról, akkor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása. □

Megjegyzés. *A tétel (b) részében az állítás nem fordítható meg. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan* $(P)-(D)$ *primál-duál pár, hogy mindkettő lehetséges pontjainak halmaza üreshalmaz.*

5.2.3. Komplementaritási tétel

13. Tétel. KOMPLEMENTARITÁSI TÉTEL *Legyen x a (P), y a (D) egy lehetséges megoldása. Ezek pontosan akkor optimálisak, ha*

$$\left.\begin{array}{rcl} \underline{y}\cdot(\underline{b}-\boldsymbol{A}\underline{x}) & = & 0 \\ (\underline{y}\boldsymbol{A}-\underline{c})\cdot\underline{x} & = & 0 \end{array}\right\} \textit{\textbf{komplementaritási feltételek}}$$

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy $\underline{x}^*$, $\underline{y}^*$ optimális megoldás. Ekkor

$$\left.\begin{array}{rcr} \mathbf{A}\underline{x}^* & \leq & \underline{b} \\ \underline{x}^* & \geq & \underline{\theta}_n \end{array}\right\}(\mathrm{P}) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcr} \underline{y}^*\mathbf{A} & \geq & \underline{c} \\ \underline{y}^* & \geq & \underline{\theta}_m \end{array}\right\}(\mathrm{D}) \quad \text{és } \underline{c}\cdot\underline{x}^* = \max z = \min w = \underline{y}^*\cdot\underline{b}$$

Szorozzuk meg a (P) feltételrendszerét balról $\underline{y}^*$-nal, a (D) feltételrenszerét balról $\underline{x}^*$-szel. Azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcr} \underline{y}^*\mathbf{A}\underline{x}^* & \leq & \underline{y}^*\cdot\underline{b} \\ \underline{x}^* & \geq & \underline{\theta}_n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcr} \underline{y}^*\mathbf{A}\underline{x}^* & \geq & \underline{c}\cdot\underline{x}^* \\ \underline{y}^* & \geq & \underline{\theta}_m \end{array}\right\} \quad \text{és } \underline{c}\cdot\underline{x}^* = \max z = \min w = \underline{y}^*\cdot\underline{b}$$

Ezeket összevetve kapjuk, hogy

$$\underline{y}^*\mathbf{A}\underline{x}^* = \underline{c}\cdot\underline{x}^* = \underline{y}^*\cdot\underline{b},$$

mely egyenletekből $\underline{y}^*$-t illetve $\underline{x}^*$-t kiemelve a komplementaritási feltételeket kapjuk.

(ii) Tegyük fel, hogy teljesülnek a komplementaritási feltételek. Ekkor a két célfüggvényérték megegyezik, ezért a 8. következmény miatt a megoldások optimálisak. □

5.2.4. Farkas-lemma

14. Tétel. Farkas-lemma

$$\left.\begin{array}{l} \underline{y}\boldsymbol{A} = \underline{c}\text{-nek létezik} \\ \underline{y} \geq \underline{\theta}_m \text{ megoldása} \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \underline{c}\cdot\underline{x} \geq 0 \text{ teljesül } \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ melyre} \\ \boldsymbol{A}\underline{x} \geq \underline{\theta}_m \end{array}\right.$$

Bizonyítás. Nem kell. □

Megjegyzés. *Bebizonyítható, hogy*

$$\text{Farkas lemma} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Erős dualitási tétel.}$$

9.tétel

5.3. A duál feladat optimális megoldásának leolvasása

	$\mathcal{L}^{(P)} \neq \emptyset$	$\mathcal{L}^{(P)} = \emptyset$
$\mathcal{L}^{(D)} \neq \emptyset$	Létezik optimum, $\underline{c}\cdot\underline{x}^* = \underline{y}^*\cdot\underline{b}$	$\underline{y}\cdot\underline{b}$ nem korlátos alulról
$\mathcal{L}^{(D)} = \emptyset$	$\underline{c}\cdot\underline{x}$ nem korlátos felülről	Ilyen is létezik

	$\mathcal{L}^{(P)} \neq \emptyset$	$\mathcal{L}^{(P)} = \emptyset$
$\mathcal{L}^{(D)} \neq \emptyset$	Létezik optimum, $\underline{c}\cdot\underline{x}^* = \underline{y}^*\cdot\underline{b}$	$\underline{y}\cdot\underline{b}$ nem korlátos alulról
$\mathcal{L}^{(D)} = \emptyset$	$\underline{c}\cdot\underline{x}$ nem korlátos felülről	Ilyen is létezik

A primál feladat megoldásakor a duál feladatot is megoldjuk:

– Ha a feltételrendszerben szerepel $=$ vagy $\geq$ reláció, akkor a szimplex algoritmus során meg kell tartani a mesterséges kiegészítő változók oszlopait is.

– Mind maximum, mind minimum feladat esetén

- az optimális tábla célsorából az u_i kiegészítő, vagy $\overline{u}_i$ mesterséges kiegészítő változók oszlopából leolvasható az y_i duál változó optimális értéke.
- Ha u_i az ptimális bázisban bázisváltozó, akkor y_i optimális értéke 0.

– Az x_i nembázisváltozók oszlopainak célsorából a duál eltérésváltozók értékét olvashatjuk le.

11. Példa. *Keressük meg az alábbi feladat duál párját, és mindkettő optimális megoldását!*

$$\begin{array}{ccccccccccl}
5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & z \to \max \\
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + & 2x_5 & \leq & 80 \\
x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & 5x_5 & \leq & 50 \\
 & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 70 \\
 & & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & & & \geq & 0
\end{array}$$

5.4. Árnyékárak

Termelésprogramozási problémában cél:

- **maximális nyereség** (Egy vállalat még nem vásárolta meg az erőforrásokat.)

  VAGY

- **maximális bevétel** (Egy vállalat már megvásárolta az erőforrásokat.)

Komód Kft. példáját vizsgáljuk:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3x_1 & + & 6x_2 & + & 15x_3 & \leq & 1500 \\
5x_1 & + & 8x_2 & + & 25x_3 & \leq & 2150 \\
10x_1 & + & 10x_2 & + & 40x_3 & \leq & 3000 \\
 & & x_1, x_2, x_3 & & & \geq & 0 \\
\hline
\multicolumn{7}{c}{4000x_1 + 7300x_2 + 17500x_3 = z \rightarrow \max}
\end{array}$$

Írjuk fel a feladat duálisát, és keressük meg a duál változóknak, feltételeknek gazdasági jelentését! (Itt fordított az eljárás. Nem egy gazdasági feladat megoldásához keresünk matematikai modellt, hanem egy matematikai modellnek geresünk gazdaság jelentést.)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}
3x_1 & + & 6x_2 & + & 15x_3 & \leq & 1500 \\
5x_1 & + & 8x_2 & + & 25x_3 & \leq & 2150 \\
10x_1 & + & 10x_2 & + & 40x_3 & \leq & 3000 \\
 & & x_1, x_2, x_3 & & & \geq & 0 \\
\hline
\multicolumn{7}{c}{4000x_1 + 7300x_2 + 17500x_3 = z \rightarrow \max}
\end{array}\right\} (P) \quad \Rightarrow \quad
\left.\begin{array}{rcrcrcr}
3y_1 & + & 5y_2 & + & 10y_3 & \geq & 4000 \\
6y_1 & + & 8y_2 & + & 10y_3 & \geq & 7300 \\
15y_1 & + & 25y_2 & + & 40y_3 & \geq & 17500 \\
 & & y_1, y_2, y_3 & & & \geq & 0 \\
\hline
\multicolumn{7}{c}{1500y_1 + 2150y_2 + 3000y_3 = w \rightarrow \min}
\end{array}\right\} (D)$$

Írjuk fel mindkét feladat első feltételét a mértékegységek feltüntetése mellett:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3\frac{m}{db}x_1 & + & 6\frac{m}{db}x_2 & + & 15\frac{m}{db}x_3 & \leq & 1500m \\
3\frac{m}{db}y_1 & + & 5\frac{\text{óra}}{db}y_2 & + & 10\frac{\text{óra}}{db}y_3 & \geq & 4000\frac{Ft}{db}
\end{array}$$

Tudjuk, hogy $[x_i] = db$, $(i = 1{,}2{,}3)$, és a második feltételből kiolvasható, hogy:

$$[y_1] = \frac{Ft}{m} \quad [y_1] = \frac{Ft}{\text{óra}} \quad [y_1] = \frac{Ft}{\text{óra}}$$

Oldjuk meg a primál feladatot szimplex algoritmussal:

	x_1	x_2	x_3	
z	-4000	-7300	-17500	0
u_1	3	6	15	1500
u_2	5	8	25	2150
u_3	$\boxed{10}$	10	40	3000

	u_3	x_2	x_3	
z	400	-3300	-1500	1 200 000
u_1	$-\frac{3}{10}$	$\boxed{3}$	3	600
u_2	$-\frac{1}{2}$	3	5	650
x_1	$\frac{1}{10}$	1	4	300

	u_3	u_1	x_3	
z	70	1100	1800	1 860 000
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	1	200
u_2	$-\frac{1}{5}$	-1	2	50
x_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	3	100

A tábla optimális. A primál feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}^* = [100{,}200{,}0] \quad \underline{u}^* = [0{,}50{,}0] \quad z^* = 1\ 860\ 000\text{Ft}$$

A duál feladat optimális megoldása:

$$\underline{y}^* = [1100{,}0{,}70] \quad \underline{v}^* = [0{,}0{,}1800] \quad w^* = 1\ 860\ 000\text{Ft}$$

Vizsgáljuk meg, hogyan változna meg a primál és a duál feladat optimális megoldása és optimális célfüggvényértéke, ha a cég változatlan áron (2000Ft/m) *1 folyóméterrel több, tehát 1501 m fűrészárut használhatna fel!*

Oldjuk meg az új primál feladatot szimplex algoritmussal:

	x_1	x_2	x_3	
z	-4000	-7300	-17500	0
u_1	3	6	15	1501
u_2	5	8	25	2150
u_3	$\boxed{10}$	10	40	3000

	u_3	x_2	x_3	
z	400	-3300	-1500	1 200 000
u_1	$-\frac{3}{10}$	$\boxed{3}$	3	601
u_2	$-\frac{1}{2}$	3	5	650
x_1	$\frac{1}{10}$	1	4	300

	u_3	u_1	x_3	
z	70	1100	1800	1 861 100
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	1	$200,\dot{3}$
u_2	$-\frac{1}{5}$	-1	2	49
x_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	3	$99,\dot{6}$

A primál feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}^* = [99,\dot{6}, 200,\dot{3}{,}0] \quad \underline{u}^* = [0, 49{,}0] \quad z^* = 1\ 861\ 100\text{Ft}$$

A duál feladat optimális megoldása nem változik, csak az optimum értéke:

$$\underline{y}^* = [1100{,}0{,}70] \quad \underline{v}^* = [0{,}0{,}1800] \quad w^* = 1\ 861\ 100\text{Ft} = z^* + y_1^*$$

Az y_1 duál változó y_1^* optimális értéke tehát megadja a fedezeti nyereségnek a fűrészáru egységnyi növekedésére eső változását.

$$\Downarrow$$

Ha a cég csak drágábban tud újabb fűrészárut vásárolni, akkor y_1^* megadja a **maximálisan fizethető felárat**.

Nézzük meg a problémát általánosan:

– Tfh. egy LP feladat duáljának csak egy optimális megoldása van. Legyen $\underline{x}^*$ a pimál, $\underline{y}^*$ a duál feladat optimális megoldása.

$\Downarrow$ Erős dualitási tétel

Két feladat optimális célfüggvényértéke megegyeik:

$$z^* = c_1 x_1^* + \ldots + c_n x_n^* = y_1^* + \ldots + y_m^* b_m = w^*.$$

– Tegyük fel továbbá, hogy

$$b_i \rightsquigarrow b_i + 1$$

változtatás esetén (P) optimális bázisa nem változik. Ekkor a célsor, így a (D) duál feladat optimális megoldása nem változik, ezért az új feladatduálisának célfüggvénye:

$$y_1^* + \ldots + y_i^*(b_i + 1) + \ldots + y_m^* b_m = w^* + y_i^*.$$

$$\Downarrow \text{ Erős dualitási tétel}$$

(P)feladat optimális célfüggvényértéke is y_i^*-gal nő.

Termelésprogramozási feladatban a duál változók gazdasági értelmezése:

– Ha a **cél a maximális fedezeti nyereség**, és (P) optimális megoldása nem degenerált, akkor az i. erőforráshoz tartozó duál változó y_i^* optimális értéke megmutatja, hogy mennyivel nőne a fedezeti nyereség, ha az i. erőforrásból változatlan áron egy egységgel többet használnánk fel. *(Legfeljebb y_i^*-gal érdemes többet adni a korábbi vételárnál.)*

– Ha a **cél a maximális árbevétel elérése**, akkor y_i^* optimális értéke megmutatja, hogy mennyivel nőne az árbevétel, ha 1 egységnyivel több lenne a birtokunkban. *(Legfeljebb y_i^*-ért érdemes vásárolni az adott termékből.)*

Ebből a gazdasági jelentésből származik az árnyékár elnevezés:

3. Definíció. *Egy LP feladat i. feltételének árnyékára változatlan optimális bázis mellett (azaz változatlan optimális termékszerkezet mellett) azt mutatja meg, hogy mennyivel javul az optimális célfüggvényérték, ha b_i-t egységnyivel növeljük. Negatív árnyékár az optimális célfüggvényérték romlását jelenti.*

Megjegyzés. *1. Ha egy LP feladat duáljának csak egy optimális megoldása van, akkor az árnyékár*

– *maximum feladat esetén a duál feladat optimális megoldása,*

– *minimum feladat esetén a duál feladat optimális megoldásának (-1)-szerese*

szolgáltatja.

2. Ha egy LP feladat duáljának több optimális megoldása van, akkor az árnyékárat úgy kapjuk, hogy a duál feladat összes lehetséges optimális megoldásának vesszük a minimumát.

Eddig a duál feladat optimális megoldásának értelmezésével foglalkoztunk. *A duál feladat többlet-változóinak optimális értéke is fontos információkat rejt magában.* Nézzük meg a Komód Kft feladatának optimális tábláját:

	u_3	u_1	x_3	
z	70	1100	1800	1 860 000
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	1	200
u_2	$-\frac{1}{5}$	-1	2	50
x_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	3	100

$v_3^* = 1800 \Rightarrow$ A duál feladat 3. feltételében 1800-zal nagyobb a baloldal a jobboldalnál.

Ez azt jelenti, hogy a fedezeti nyereséget maximum 1800 Ft-tal növelve az optimális megoldás változatlan. 1800 Ft-tal növelve a fedezeti nyereséget az optimális tábla annyiban változna, hogy $v_3^* = 0$ lenne, tehát lenne alternatív optimuma a primál feladatnak.

4. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{B}$ egy optimális bázis. Ekkor az x_j nembázisváltozó* ***redukált költségén*** *a*

$$\overline{c}_j = \underline{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \underline{a}_j - c_j$$

mennyiséget értjük.

Megjegyzés. *1. Ha a duál feladatnak nincs alternatív optimuma, akkor x_j változó redukált költségét a j. duál feltétel eltérésváltozója szolgáltatja.*

2. Az x_j nembázisváltozó redukált költsége megmutatja, hogy

- *mennyivel kell ennek a változónak a célegyütthatóját* ***javítani****, azaz*
  - *maximum esetén növelni,*
  - *minimum esetén csökkenteni*

  ahhoz, hogy x_j egy optimális megoldásban bázisváltozó legyen.
- *az optimális célfüggvényérték mennyivel* ***romlik****, azaz*
  - *maximum esetén mennyivel csökken,*
  - *minimum esetén mennyivel nő*

  ha x_j értékét 0-ról 1-re növeljük.

5.5. A duál szimplex módszer

Néhány feladat esetén a duál feladat megoldása könnyebb, mint a primál feladaté. Például:

$$\left.\begin{array}{lcr} \min z & = & \underline{c}\underline{x} \\ \mathbf{A}\underline{x} & \geq & \underline{b} \\ \underline{x} & \geq & \underline{\theta}_n \\ \underline{c}, \underline{b} & \geq \underline{\theta}_m & \end{array}\right\} (P) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{lcr} \max w & = & \underline{y}\underline{b} \\ \underline{y}\mathbf{A} & \leq & \underline{c} \\ \underline{y} & \geq & \underline{\theta}_m \\ \underline{c}, \underline{b} & \geq \underline{\theta}_m & \end{array}\right\} (D)$$

Itt a primál feladat általános alakú, míg a duális feladat egy normál feladat, melyet nyilván egyszerűbb megoldani.

Ha van a feltételek között egyenlőség, akkor a duál feladatnak ennek a feltételnek megfelelő változója előjelkötetlen, így biztosan nem könnyebb megodani ebben az esetben a duális feladatot, mint a primál feladatot. A továbbiakban feltételezzük, hogy a feltételrendszerben nincs egyenlőség illetve, hogy a célfüggvény együtthatói nemnegatívak.

Ha az LP-feladat duálisát könnyebb megoldani, mint az eredeti feladatot, akkor a következő két lehetőség közül választhatunk.

– Felírjuk a feladat duálisát és azt a korábban megismert szimplex algoritmussal megoldjuk. Az optimális táblából kiolvassuk a duálisának (vagyis az eredeti feladatnak) az optimális megoldását.

– Az úgynevezett duál szimplex algoritmust alkalmazzuk.

A duál szimplex algoritmus minimum primál feladatra, melyben a célfüggvény együtthatói nemnegatívok:

❶ A feltételrendszert $\mathbf{A}\underline{x} \leq \underline{b}$ alakra hozzuk. (A tábla felírása előtt -1-gyel való szorzással a $\geq$ feltételeket lecseréljük.)

❷ Mivel a célfüggvény minimumát keressük és $\underline{c} \geq \underline{\theta}_m$, ezért az induló tábla célsorában nincsenek pozitív elemek.

❸ Ha az utolsó oszlopban vannak negatív számok a tábla még nem optimális (innen tudjuk leolvasni az $\underline{y}$ duálváltozók értékét.)

❹ A bázistranszformációt úgy végezzük, hogy a célsorba ne kerüljön pozitív szám és a duál célfüggvényérték ne növekedjen.

A megadott feltételeket az alábbi pivotelem választási szabályokkal biztosítjuk:

– Olyan sorban választunk pivot elemet, ahol b_k negatív.

– Negatív számot választunk pivotelemnek.

– *Szűk keresztmetszet szabálya:* A kiválasztott sor minden negatív elemét elosztjuk a célsor megfelelő elemével. Az az elem lesz a pivot elem, amelyre ez a hányados a legkisebb. $\left(\frac{c_r}{a_{kr}} = \min\limits_{j: a_{kj}<0} \frac{c_j}{a_{kj}}\right)$

Az algoritmus kétféleképpen érhet véget

a) Ha az utolsó oszlopban nincs negatív elem, akkor optimális táblához jutottunk.

b) Ha valamelyik b_k elem sorában a táblában nincs negatív elem, akkor a duál feladat célfüggvénye alulról nem korlátos és a primálfeladatnak nincs lehetséges megoldása.

12. Példa. *Oldjuk meg az alábbi LP-feladatot duál-szimplex módszerrel.*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & \min z \\
x_1 & & & & & + & x_4 & \geq & 4 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & \geq & 8 \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & \geq & 8 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & \geq & 6 \\
 & & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0
\end{array}
$$

5.6. Érzékenységvizsgálat

Az érzékenységvizsgálattal ebben a kurzusban részletesen nem foglalkozunk. Annyit viszont megjegyzünk, hogy az érzékenységvizsgálat célja meghatározni,

– hogy legfeljebb mennyivel változtathatjuk meg egyenként a célfüggvény együtthatóit, hogy az optimális bázis változatlan maradjon?

– hogy legfeljebb mennyivel változathatjuk meg egyenként $\underline{b}$ kapacitásvektor komponenseit, hogy az optimális bázis ne változzon?

10. tétel

Tétel. *Legyen $\mathcal{S}$ egy PQ-séta $E_{\mathcal{S}}$ élhalmazzal. Ekkor létezik $\mathcal{T}$: PQ-út, melynek $E_{\mathcal{T}}$ élhalmazára $E_{\mathcal{T}} \subseteq E_{\mathcal{S}}$. Azaz ha a gráf két pontja között létezik séta, akkor a két pont között van út is, méghozzá olyan, amely nem tartalmaz az említett sétához nem tartozó élt.*

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a G gráf összefüggő, ha bármely két pontja között van út.*

Definíció. *Legyen $G_1 = (V_1, E_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2)$ két gráf a G_1 gráfot a G_2 gráf **részgráf**jának nevezzük, ha $V_1 \subseteq V_2$ és $E_1 \subseteq E_2$.*

Definíció. *Az egyszerű, körmentes, összefüggő gráfokat **fagráf**oknak nevezzük.*

Tétel. *Egy G gráf akkor és csak akkor fagráf, ha bármely két pontja között pontosan egy út vezet.*

Tétel. *Legyen G egy egyszerű gráf. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1.) G fagráf.

2.) G összefüggő, de ha bármely élét töröljük, akkor már nem marad összefüggő.

3.) G körmentes, de bármely új élt hozzávéve a keletkező gráf tartalmaz kört.

Definíció. *Legyen $G = (V_G, E_G)$ egy gráf és $F = (V_F, E_F)$ fa a G egy részgráfja. Az F fát a G egy **feszítőfá**jának nevezzük, ha $V_G = V_F$.*

Tétel. *Egy G gráfnak akkor és csak akkor létezik feszítőfája, ha G összefüggő.*

Tétel. *Legyen F egy n pontú fa. Ekkor F-nek $n-1$ éle van.*

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $c: E_G \to \mathbb{R}^+$ egy költségfüggvény G élein. Ekkor egy $H \subseteq E$ élhalmaz költsége*

$$c(H) = \sum_{e \in H} c(e).$$

4. Megjegyzés. *Gyakorlati problémák gráfelméleti modelljében cél általában:*

- *két pont közötti legrövidebb út,*
- *minimális költségű feszítőfa,*
- *stb.*

*Ezek megkeresése valamilyen stratégia szerinti gráfbejárással történik. (**Szélességi-**, **mélységi keresés**.)*

13. Példa. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $c: E_G \to \mathbb{R}^+$ egy költségfüggvény G élein. Keressük a G gráf olyan összefüggő részgráfját, amelyre az élek összköltsége minimális. A probléma **Minimális élsúlyú feszítőfa probléma**ként is ismert.*

A feladat megoldására két algoritmust is fogunk adni:

- Kruskál-algoritmus (Gyakorlaton),
- Prim-algoritmus.

Mindkét módszer úgynevezett **mohó algoritmus**. A mohó algoritmusok jellegzetessége, hogy minden lépésben a legígéretesebb lehetőséget választják. Az ilyen stratégia általában nem vezet el az optimális megoldáshoz, de a minimális élsúlyú feszítőfa probléma esetén igazolható, hogy az optimumot adja.

Prim algoritmusa (Robert Clay Prim 1921-)

Legyen S a keresett feszítőfa csúcsainak halmaza, H pedig legyen az éleié.

Induljunk ki a gráf egy tetszőleges P_0 pontjából, azaz legyen $S := \{P_0\}$ és $H := \emptyset$.

- Keressük meg a minimális költségű $\{P_i, P_j\}$ élt, melyre $P_i \in S$, de $P_j \notin S$
- Bővítsük ki a megtalált éllel és a hozzá tartozó új csúccsal a részgráfunkat, azaz legyen $S := S \cup \{P_j\}$ és $H := H \cup \{\{P_i, P_j\}\}$
- Az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg $S \neq V$.
- Ha $S = V$, akkor a kapott $F = (S, H)$ gráf a minimális költségű feszítőfa.

Megjegyzés. *Mindkét módszerről megmutatható, hogy egy minimális költségű feszítőfát ad eredményül.*

14. Példa. *TÁBLÁN*

Definíció. *Egy G irányított gráfot egy $c: E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitás-függvénnyel **hálózat**nak nevezünk.*

Megjegyzés. *A hálózatokat az irányított gráfokhoz hasonlóan ábrázoljuk, az egyes élekhez tartozó kapacitás értékeket az élek fölé szokás írni.*

Definíció. *Legyen (G, c) (c: kapacitás-függvény) egy hálózat. G-ben egy $f : E(G) \to \mathbb{R}^+$ függvényt **folyam**nak nevezünk, ha bármely X pont esetén teljesül, hogy a kimenő folyam erősség a csúcspont kínálatával nagyobb (illetve keresletével kisebb) a beérkező folyam erősségénél.*

Definíció. *Egy f folyamot **megengedett folyam**nak nevezünk, ha minden $e \in E(G)$ él esetén*

$$0 \leq f(e) \leq c(e).$$

11.tétel

6.2. Minimális Költségű Hálózati Folyam

Példafeladat:

- Egy régió m városában egy terméket gyártanak és árulnak.
- Minden város esetében ismert a kinálat és a kereslet különbsége b_i ($i = 0,1,\ldots,m$). Ha $b_i > 0$ akkor többlet áru van.
- Feltételezzük, hogy a nettó összkereslet megegyezik a nettó összkínálattal, azaz $\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$.
- Így a nettó kínálattal rendelkező városokból az árut át kell szállítani oda ahol kereslet van.
- A városokat egy gráf csúcsaival szemléltetjük.
- Ahol lehetséges a két város között szállítás oda irányított éleket rajzolunk.

– Az adott élen való szállítás fajlagos költségét az él fölé írt számmal jelöljük.

– A mutatkozó nettó kereslet illetve kínálat értékét a gráf csúcsai fölé írjuk.

– Célunk, hogy a városok igényeit kielégítsük úgy, hogy a szállítási költség minimális legyen.

– Néha egy élen a szállításnak valamilyen korlátja van, ekkor ezt is jelöljük az élen.

A példafeladatban vázolt optimalizálási feladatot **M**inimális **K**öltségű **H**álózati **Folyam** problémának, röviden MKHF-problémának nevezzük.
A probléma egy m csúcsú irányított hálózattal modellezhető:

– Az (i,j) élen át az i-edik városból a j-edik városba szállítsunk x_{ij} mennyiségű árut. Könnyen látható, hogy $x : E(G) \to \mathbb{R}^+$ egy folyam a fenti hálózatban.

– Ha megengedett folyamokat tekintünk, akkor a probléma az alábbi LP-feladatot definiálja:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{(i,j)\in E(G)} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j:(i,j)\in E(G)} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E(G)} x_{ji} &= b_i \quad \forall i \in V(G) \\ 0 \le x_{ij} \le k_{ij} & \qquad\quad \forall (i,j) \in E(G) \end{aligned}$$

Megjegyzés. *A fenti LP-feladat együttható mátrixa a gráf illeszkedési mátrixa.*

Megjegyzés. *Könnyen látható, hogy a fenti LP-feladatnak csak akkor van lehetséges megoldása, ha* $\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$*, ezért a feltétel teljesülését a továbbiakban feltételezzük.*

A következő tételek biztosítják az algoritmus létezését. A tételeket bizonyítás nélkül közöljük. A bizonyítások megtalálhatók például [3.]-ban.

Tétel. *Egy G hálózat bármely feszítőfájának éleihez az $\mathbf{A}$ illeszkedési mátrix oszlopvektorterének egy bázisa tartozik, amely a sorok és az oszlopok átrendezésével alsóháromszög mátrixszá alakítható.*

Tétel. *Egy G hálózat bármely körutat tartalmazó részgráfjához az $\mathbf{A}$ illeszkedési mátrix egy összefüggő oszlopvektor-rendszere tartozik.*

Következmény. *Egy G gráf feszítőfái és az $\mathbf{A}$ illeszkedési mátrix oszlopvektorterének bázisai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.*

Tétel. *Mivel láttuk, hogy ha egy LP-feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális bázismegoldása is, ezért ha az MKHF problémának van optimális megoldása, akkor van optimális feszítőfa megoldása.*

Tétel. *Ha a $\underline{b}$ vektor komponensei egészek, akkor az $MKHF$ probléma bármely bázismegoldása egészértékű.*

Az MKHF-probléma egy lehetséges megoldásának optimalitását a komplementaritási tétel segítségével vizsgáljuk.
Az MKHF feladat duálisa ($\mathbf{A}$ illeszkedési mátrix):

$$\left.\begin{array}{c} \min\ z = \underline{c}\cdot\underline{x} \\ \mathbf{A}\cdot\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{\theta}_n \le \underline{x} \le \underline{k} \quad \underline{k} \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} (P) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} max\ w = \underline{y}\cdot\underline{b} \\ \underline{y}\cdot\mathbf{A} \le \underline{c} \\ \underline{y} \in \mathbb{R}^m \end{array}\right\} (D)$$

Mivel az **A** mátrix minden oszlopában csak két elem nem 0 (az egyik +1, a másik pedig −1), ezért a feltételrendszer minden sorának baloldalán csak két változó szerepel.

Így a duál feladat a következő alakban is írható:

$$
\begin{aligned}
max\ w = \sum_{i\in V} b_i \cdot y_i \\
y_i - y_j \le c_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \\
y_i \in \mathbb{R} \quad \forall i
\end{aligned}
$$

m csúcsú n élű hálózat LP-modelljének duálisa n feltételt és m változót tartalmaz.

A komplementaritási tétel alapján:

$$
\begin{aligned}
\underline{y} \cdot (\underline{b} - \mathbf{A} \cdot \underline{x}) = 0 \\
(\underline{c} - \underline{y} \cdot \mathbf{A}) \cdot \underline{x} = 0
\end{aligned}
$$

Az első feltétel a primál feladat minden lehetséges megoldására teljesül, mivel $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$. Így a komplemetaritási tétel az alábbi alakban mondható ki:

Tétel. *Az MKHF feladat $\underline{x}$ lehetséges megoldása és duáljának $\underline{y}$ megoldása akkor és csak akkor optimális, ha*

$$x_{ij} > 0 \quad \textit{esetén} \quad y_i - y_j = c_{ij}$$

teljesül. Azaz a primál feladat egy lehetséges megoldása tehát akkor és csak akkor optimális, ha a pozitív értékű primálváltozókhoz tartozó duál feltételek egyenlőség formában teljesülnek és a duál változóknak ez az értékrendszere kielégíti a többi duál feltételt.

A primál feladat egy lehetséges megoldásának optimalitásának szükséges és elégséges feltétele az, hogy minden x_{ij} nem-bázisváltozóra

$$\overline{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij} \le 0.$$

Alapötlet:

– Tekintsünk egy primál lehetséges megoldást.

– A komplemetaritási feltétel alapján meghatározzuk a duál változók egy értékrendszerét.

– Ellenőrízzük, hogy ez az értékrendszer kielégíti-e a duál feladat feltételrendszerét.

– Ha igen akkor optimális megoldással rendelkezünk mind a primál, mind a duál feladat esetén.

– Ha nem, akkor a primál feladat lehetséges megoldását javítjuk.

Kérdés: Hogyan javítható az MKHF-probléma egy lehetséges megoldása?

– Tegyük fel, hogy ismerjük az MKHF feladat egy lehetséges bázismegoldás, amelyet a hálózatban egy feszítőfa reprezentál.

– A feszítőfa éleihez tartozó folyamértékek a bázisváltozók aktuális értékei.

– Az $y_i - y_j = c_{ij}$ feltételek segítségével a duál változók egy értékrendszerét meghatározzuk.

– A duálváltozók száma m, de csak $m-1$ feltétel van. Az utolsó duálváltozó értéke tetszőlegesen választható, általába $y_1 = 0$ értékadással indítunk.

– Nem-bázis változók esetén ellenőrízük az $y_i - y_j \leq c_{ij}$ feltételeket.

– Ha ez mind teljesül, akkor készen vagyunk.

– Ha nem, akkor azt az x_{ij} változót vonjuk be a bázisba, amelyre a

$$\overline{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij} \geq 0$$

érték a legnagyobb.

Hálózati szimplex transzformáció

– Az előbb meghatározott x_{ij} változóhoz tartozó éllel kiegészítjük a feszítőfát.

– A gráfban ekkor kör keletkezik.

– Mivel $\overline{c}_{ij}{=}y_i{-}y_j{-}c_{ij}{>}0$ az (i, j) élen a folyam értékét 0-ról pozitívra változtatva a célfüggvény javulni fog.

– Addig növeljük az (i, j) élen a folyamot, amíg a gráfban valamelyik élen a folyam erőssége le nem csökken 0-ra.

– Így egy – az előzőnél jobb – bázismegoldást kaptunk.

– Ellenőrízzük az új megoldás optimalitását.

12. tétel

6.3. Szállítási feladat

Vizsgáljuk a következő problémát:

- Vállalatunk m telephelyről n megrendelőhöz juttatja el termékét.
- A telephelyek termelési kapacitása rendre $t_1, t_2, \ldots, t_m$
- A megrendelők igényei rendre $r_1, r_2, \ldots, r_n$
- Az i-edik telephelyről a j-edik megrendelőnek szállítsunk x_{ij} mennyiségű árut.
- Az i-edik telephely és a j-edik megrendelő között a szállítás fajlagos költsége c_{ij}.
- Kiegyensúlyozott szállítási feladatról beszélünk, ha a folyamerősségre vonatkozó korlátok olyan nagyok, hogy nem szűkítik a lehetséges megoldások halmazát.
- Feltehetjük továbbá, hogy
$$\sum_{i=1}^{m} t_i = \sum_{j=1}^{n} r_j.$$

A szállítási feladat egy speciális MKHF-probléma, amely egy páros gráffal modellezhető, hiszen

- A telephelyeknek megfelelő kínálati pontok között nem fut él.
- A megrendelőknek megfelelő keresleti pontok között nem fut él.
- Nincs a hálózatban olyan pont, amelynek a kereslete és a kínálata is 0.

Ekkor az alábbi speciális LP-feladat írható fel:

$$\begin{array}{lll}
 & \min z = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = t_i, & i = 1, \ldots, m & \text{kínálati feltételek} \\
\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j, & j = 1, \ldots, n & \text{keresleti feltételek} \\
x_{ij} \geq 0 & & \text{i=1,... m,j=1,... n}
\end{array}$$

Ha a kiegyensúlyozott szállítási feladat (KSZ feladat) keresleti feltételeit a MKHF feladatnál látott módon írjuk fel, akkor a következő feltételrendszert kapjuk:

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -r_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

A KSZ feladat esetén azonban a fenti feltételrendszer felírása a szokásos.

Mivel a KSZ feladat egy speciális MKHF feladat, ezért minden olyan állítás igaz rá, ami érvényes az MKHF feladatra. Tehát együtthatómátrixa egy illeszkedési mátrix, melynek $m+n$ sora és $m \times n$ oszlopa van. $\Rightarrow$ Együtthatómátrix rangja $m+n-1$.

- A szállítási feladatot **disztribúciós módszerrel** oldjuk meg, ami valójában a hálózati szimplex módszer speciális változata.

– Az eljárás során a báziscserét a hálózat helyett egy $m \times n$-es mátrixban, az úgynevezett disztribúciós táblában végezzük.

- A disztribúciós tábla sorai a telephelyeknek felelnek meg.
- Az oszlopok a megrendelőknek.
- A tábla belsejét a célfüggvény együtthatóival töltjük fel.
- Az utolsó oszlopba az egyes telephelyek kínálatait írjuk.
- Az utolsó sorban az egyes megrendelők kereslete található.

	R_1	R_2	$\cdots$	R_n	
T_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	t_1
T_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	t_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
T_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	t_m
	r_1	r_2	$\cdots$	r_n	

– A következő lépésünk az előző eredményétől függ:

  - Ha az előbb elszállítottuk az i-edik telephely összes áruját, akkor c_{ij} oszlopában lekötjük a legkisebb leköthető költségelemet.
  - Ha az előbb kielégítettük a j-edik megrendelő igényeit, akkor c_{ij} sorában lekötjük a legkisebb leköthető költségelemet.
  - Ha a telephely és a megrendelő igényeit egyszerre elégítettük ki, akkor c_{ij} sorában, vagy oszlopában mégegy költségelemet lekötünk 0 értékkel.

– Az eljárást addig folytatjuk, amíg az összes telephely és az összes megrendelő igényét kielégítettük.

Az előző algoritmussal a feladat egy lehetséges megoldásához jutottunk, ez lesz az disztribúciós módszer kiinduló bázisa.

$\square$

Optimalitás vizsgálat a szállítási feladat során

Az optimalitást a komplementaritási tétel alapján vizsgáljuk.

$$\left.\begin{array}{rcl} \min z = \underline{c}\cdot\underline{x} & & \\ \mathbf{A}_1\underline{x} & = & \underline{t} \\ \mathbf{A}_2\underline{x} & = & \underline{r} \\ \underline{x} & \geq & \underline{\theta}_{m\cdot n} \end{array}\right\}(P) \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{rcl} \max w = \underline{u}\cdot\underline{t}+\underline{v}\cdot\underline{r} & & \\ \underline{u}\mathbf{A}_1+\underline{v}\mathbf{A}_2 & \leq & \underline{c} \\ \underline{u}\in\mathbb{R}^m, \underline{v}\in\mathbb{R}^n & & \end{array}\right\}(D)$$

Mivel az $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ mátrixok minden oszlopában egy 1-es van és a többi elem mind 0, ezért a duál feladat feltételei $u_i+v_j \leq c_{ij}$ alakúak.

A komplementaritási feltételek:

$$\begin{array}{rcl} \underline{u}(\underline{t}-\mathbf{A}_1\underline{x}) & = & 0 \\ \underline{v}(\underline{t}-\mathbf{A}_2\underline{x}) & = & 0 \\ (\underline{c}-\underline{u}\mathbf{A}_1-\underline{v}\mathbf{A}_2)\underline{x} & = & 0 \end{array}$$

Mivel az első két feltétel a primál feladat minden lehetséges megoldására teljesül, ezért

Tétel. *A szállítási feladat $\underline{x}$ lehetséges megoldása és a duál feladat $[\underline{u},\underline{v}]$ megoldása akkor és csak akkor optimális, ha*

$$x_{ij}>0 \quad \textit{esetén} \quad u_i+v_j=c_{ij}$$

teljesül.

Az optimalitás vizsgálat tehát a következő lépésekből áll:

❶ A lekötött c_{ij} értékekhez hozzárendeljük az $u_i+v_j=c_{ij}$ feltételeket.

❷ Így $m+n-1$ egyenlet és $m+n$ ismeretlen adódik.

❸ Az első változót szabadon választjuk. A többit kiszámítjuk.

❹ Ha a duál változók kielégítik a lekötetlen c_{ij}-khez tartozó $u_i+v_j \leq c_{ij}$ feltételeket, akkor a megoldás optimális.

❺ Ha nem, akkor a megoldást javítjuk.

Bázismegoldás javítása a szállítási feladat során

- Minden (i,j) nembázis él esetén kiszámítjuk a $\overline{c}_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$ értékeket.
- Ha minden $\overline{c}_{ij}$ nempozitív, akkor a megoldás optimális.
- Ha van pozitív $\overline{c}_{ij}$, akkor azt az élt visszük a bázisba, amelyre $\overline{c}_{ij}$ a legnagyobb.
- Újabb él bevonásával a gráfban kör keletkezik.
- A körút a disztribúciós táblán is felismerhető, mert olyan zárt poligont alkot, melynek
  - csúcsai a kötött költségelemeknél vagy az újonnan kiválasztott elemnél lesznek
  - éleipedig mind vízszintesek, vagy függőlegesek
- Ha egy olyan élen változtatjuk meg a folyam értékét 0-ról valamely pozitív Q-ra, melyen $\overline{c}_{ij}$ pozitív volt, akkor a célfüggvény értéke csökkeni fog.

- Egészen addig növeljük az új élen a folyamot, amíg a hurok valamely másik csúcsán a folyam értéke nulla nem lesz.
- Így egy új, az előzőnél jobb bázismegoldást kaptunk.

Megjegyzés. *A KSZ feladatnak mindig van optimális megoldása és a fenti eljárással véges számú lépésben előállítható.*

5. Definíció. *A fenti módon megkonstruált zárt poligont **huroknak** nevezzük.*

Rajzoljuk be a 18. példa disztribúciós táblájába a c_{42} elemből indított hurkot!

	$v_1 = 2$	$v_2 = 7$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$	
$u_1 = 0$	9_{-}	$\boxed{7}^{30}$	$\boxed{3}^{40}$	7_{-}	70
$u_2 = -5$	4_{-}	$\boxed{2}^{40}$	9_{-}	4_{-}	40
$u_3 = 2$	$\boxed{4}^{10}$	4_5	$\boxed{5}^{20}$	6_{-}	30
$u_4 = 1$	$\boxed{3}^{40}$	2_6	8_{-}	$\boxed{2}^{40}$	80
	50	70	60	40	

	$v_1 = 2$	$v_2 = 7$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$	
$u_1 = 0$	9_{-}	$\boxed{7}^{30-Q}$	$\boxed{3}^{40+Q}$	7_{-}	70
$u_2 = -5$	4_{-}	$\boxed{2}^{40}$	9_{-}	4_{-}	40
$u_3 = 2$	$\boxed{4}^{10+Q}$	4_5	$\boxed{5}^{20-Q}$	6_{-}	30
$u_4 = 1$	$\boxed{3}^{40-Q}$	$2_6^{\,Q}$	8_{-}	$\boxed{2}^{40}$	80
	50	70	60	40	

Megjegyzés. – *A hurokélek metszhetik egymást valamely költségelemnél, de ez nem szán csúcspontnak.*

– *Az elemi bázistranszformációt úgy hajtjuk végre, hogy a hurok sarokpontjaihoz tartozó bázisu tozók értékét felváltva Q-val növeljük, illetve csökkentjük. Q-t azon bázisváltozók értékén minimumának választjuk, amelyekből Q-t levonunk.*

6.3.1. A szállítási feladat néhány változata

1. eset. *Ha a kínálat – termelők kapacitása – nagyobb a megrendelők igényénél, azaz*

$$\sum_{i=1}^{m} t_i > \sum_{j=1}^{n} r_j,$$

akkor az LP modell kínálati feltételeit

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le t_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

alakú egyenlőtlenségekkel fogalmazzuk meg. A keresleti feltételek és a célfüggvény változatlan.
Megoldás. A disztribúciós táblát egy fiktív megrendelővel egészítjük ki, akinek mindenki nulla költséggel szállíthat.

	R_1	R_2	$\cdots$	R_n	R_{n+1}	
T_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	0	t_1
T_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	0	t_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	0	t_m
	r_1	r_2	$\cdots$	r_n	r_{n+1}	

Fiktív megrendelő kereslete:

$$r_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} t_i - \sum_{j=1}^{n} r_j.$$

Ha mégis szeretnénk, hogy bizonyos termelők kiasználják kapacitásaikat, akkor a fiktív megrendelő oszlopában a kiválasztott termelőknek megfelelő sorokban a nullákat nagy költségelemekkel, ún. **tiltótarifákkal (M)** helyettesítjük. Ezáltal megakadályozzuk, hogy ezek a termelők a fiktív megrendelőnek szállítsanak. Az LP modellben az ezekre a termelőkre vonatkozó feltételeket egyenlőség alakban írjuk fel. □

6.4. Hozzárendelési feladat

Példafeladat:

- Egy tervezőiroda n mérnöke összesen n épület tervrajzát szeretné elkészíteni.
- Bármelyik mérnök bármelyik épület tervrajzát meg tudja csinálni, de nem mindenki végez ugyanannyi idő alatt.
- Minden mérnök pontosan egy feladatot fog elvégezni.
- Tudjuk, hogy az i-edik munkát a j-edik mérnök c_{ij} nap alatt végezné el.
- Hogyan osszuk ki a feladatokat, hogy a lehető legkevesebb idő alatt végezzünk?

A probléma egy teljes, irányítatlan páros gráffal modellezhető, a megoldást pedig a teljes páros gráf minimális élsúlyú párosítása, vagy 1-faktora adja.

A probléma megoldásának egyik módja, hogy egy olyan LP-feladatot definiálunk, amelyben azt is kikötjük, hogy a változók csak 0 vagy 1 értékeket vehetnek fel.

Az adott probléma során ez a feltétel nem jelent korlátozást, ha eltekintünk tőle és szimplex módszerrel megoldjuk a feladatot, akkor is minden változó értéke 0 vagy 1 lesz.

Vezessük be az x_{ij} változót:

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik munkát a } j\text{-edik mérnök végzi,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Így a feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned} \min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Ha megengednénk, hogy a változók tetszőleges nemnegatív értékeket felvegyenek, akkor egy speciális szállítási feladattal lenne dolgunk. A szállítási feladatnál, ha minden b_i egész, akkor minden bázis elemei egészek. Ez most is igaz, így $0 \leq x_{ij} \leq 1$ és $x_{ij} \in \mathbb{Z}$, ahonnan az állítás következik.

Magyar módszer

- Az előbb felírt LP-feladtban eltekintünk az egészértékű kikötéstől.
- Felírjuk a feladat duálját:

$$\begin{aligned} &\max z = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \\ &u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad \forall i, j \\ &u_i, v_j \in \mathbb{R}, \qquad \forall i, j \end{aligned}$$

- A célfüggvény együtthatóiból álló C mátrixon elvégezzük a következő redukciót.

- A mátrix minden sorában megkeressük a sor legkisebb elemét és azt kivonjuk a sor minden eleméből.
- A mátrix minden oszlopában megkeressük az oszlop legkisebb elemét és azt kivonjuk az oszlop minden eleméből.

– Így a mátrix minden oszlopában és sorában van legalább egy 0.

– Ha u_i-t az i-edik sorból levont értékkel és v_j-t a j-edik oszlopból levont értékkel tesszük egyenlővé, azaz
$$u_i := \min_j c_{ij} \quad i = 1, \dots, n \qquad v_j := \min_i c_{ij} \quad j = 1, \dots, n,$$
akkor a redukált költségmátrix $c_{ij} - u_i - v_j$ elemei nemnegatívak lesznek, azaz a duál feladat egy megoldásához jutottunk.

– A komplementaritási tétel értelmében a primál feladat $\underline{x}$ megoldása akkor optimális, ha $x_{ij} > 0$ esetén $c_{ij} - u_i - v_j = 0$.

– Legyen
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } c_{ij} - u_i - v_j = 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

– Ha sikerül a redukált költségmátrix nulla elemei közül n darabot kiválasztani, hogy a nekik megfelelő x_{ij} változóknak 1 értéket adva lehetséges megoldáshoz jussunk, akkor ez a megoldás optimális.

– A feladat feltételei miatt a kiválasztott n nulla páronként külön sorban és oszlopban kell hogy legyen.

– Ha nem találunk megfelelő nullákat, akkor a részleges primál megoldásra támaszkodva javítjuk a duál megoldást.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy egy $X \subset V(G)$ halmaz lefogja G éleit, ha bármely $e \in E(G)$ élnek legalább az egyik végpontja benne van X-ben.*

Tétel (König Dénes tétele). *Egy G páros gráfban a maximális párosítás éleinek száma megegyezik a G éleit lefogó csúcspontok minimális számával.*

Megjegyzés. *Egy párosítás éleit a redukált költségmátrix nulla elemeinek bekeretezésével, a lefogó csúcspontokat a megfelelő sorokra, vagy oszlopokra fektetett fedővonalakkal szokás jelölni. A párosítás éleinek megfelelő nullákat független nulláknak nevezzük. Könnyen látható, hogy a független nullák páronként különböző sorban és különböző oszlopban vannak.*

Következmény. *Az előző problémában a független nullák száma megegyezik az összes nullát lefedő fedővonalak számával.*

Megjegyzés. *A független nullák választásánál általában jó irány-elv, hogy először olyan nullákat választunk, amelyek sorában illetve oszlopában kevés nulla van. A fedővonalak kijelölésekor viszont arra törekszünk, hogy először olyan sort, vagy oszlopot válasszunk, amelyben sok nulla van.*

Ha megtaláltuk az összes nullát lefedő fedővonal rendszert, akkor a duál feladat megoldását a következő módszerrel javíthatjuk:

– Válasszuk ki a legkisebb fedetlen elemet. Legyen ez δ.

- Vonjuk ki δ-t a fedetlen sorok minden eleméből.
- Adjuk hozzá δ-t a lefedett oszlopok minden eleméhez.

Megjegyzés. *A fenti eljárás ekvivalens a következő javítással:*

- *Válasszuk ki a legkisebb fedetlen elemet. Legyen ez δ.*
- *Vonjuk ki δ-t minden fedetlen elemből.*
- *Adjuk hozzá δ-t a minden kétszeresen lefedett elemhez.*
- *Az egyszeresen fedett elemeket hagyjuk változatlanul.*

A duál változók új értékei is kielégítik a duál feladat feltételeit, mivel a költségmátrixnak a transzformáció után sem lesz negatív eleme.

Belátjuk, hogy az előző transzformáció-sorozat véges sok lépésben véget ér.

- Jelölje ℓ_s a lefedett sorok számát és ℓ_o a lefedett oszlopokét.
- Ekkor a duál feladat célfüggvényértékének növekedése $(n-\ell_s)\delta$
- A duál feladat célfüggvényértékének csökkenése $\ell_o\delta$
- A célfüggvényérték tényleges változása a kettő különbségeként kapható:

$$d = (n-\ell_s)\delta - \ell_o\delta = (n-\ell_s-\ell_o)\delta.$$

- Mivel a fedővonalak száma $\ell_s+\ell_o < n$, ezért $d > 0$, azaz a célfüggvényérték minden lépésben növekszik.
- A duál célfüggvényérték szigorúan növekszik és egészértékű, így minden lépésben legalább 1-gyel nő.
- Mivel a primál feladatnak van optimális megoldása, így véges sok transzformáció után a duál célfüggvényérték egyenlő lesz a primál feladat optimális értékével.
- Ekkor biztosan található n darab független nulla.