14. A Poisson eloszlás, mint binomiális eloszlások határeloszlása.

A Poisson eloszlásnak megvan az a fontos tulajdonsága, hogy jól közelíti a binomiális eloszlást. Pontosabban, ha az n-ed rendű, p paraméterű binomiális eloszlásnál n értéke minden határon túl nő, miközben p úgy tart 0-hoz, hogy az n*p = λ állandó, akkor a határeloszlás a λ paraméterű Poisson eloszlás.

Biz.:

a binomiális eloszlás formulája: $P_k^{(n)} = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$

Megmutatjuk, hogy rögzített n*p = λ esetén: $\lim_{n\to\infty} P_k^{(n)} = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-k}$

Az n*p=λ egyenlőség alapján

$$P_k^{(n)} = \binom{n}{k} * \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k * (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$
$$= \frac{n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-k+1)*\lambda^k}{k!} * \frac{\lambda^k}{n^k} * (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$$
$$= \frac{n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-k+1)}{n*n*n*\ldots*n} * \frac{\lambda^k}{k!} * (1-\frac{\lambda}{n})^{-k} * (1-\frac{\lambda}{n})^{n}$$

Mivel:

$$\frac{n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-k+1)}{n*n*n*\ldots*n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)*\left(1-\frac{2}{n}\right)*\ldots*\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to 1$$

és

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1$$

ha n→∞, valamint $\lim_{n\to\propto}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$