A) Feltételes valószínűség

A1. Feladat. Öt termelőtől szállítanak körtét egy üzletbe. Az egyes termelők az összmennyiségnek 15, 10, 20, 30 és 25 %-át adják. A beszállított árú 60, 40, 50, 70 és 90 %-a első osztályú. Kiválasztunk találomra egy körtét és az nem első osztályú. Mi a valószínűsége annak, hogy ezt a körtét az ötödik termelő szállította?

Megoldás: Jelölje A_i (i = 1,2,3,4,5) azt az eseményt, hogy a kiválasztott körte az i-edik termelőtől származik. Ezek az események teljes eseményrendszert alkotnak. Jelölje J azt az eseményt, hogy a kiválasztott körte első osztályú. Jelölje S ennek komplementerét. Ebben a modellben a rendelkezésünkre álló információ a következő:

$P(A_1) = 0.15 \qquad P(A_2) = 0.1 \qquad P(A_3) = 0.2 \qquad P(A_4) = 0.3 \qquad P(A_5) = 0.25$

és

$P(J|A_1) = 0.6 \qquad P(J|A_2) = 0.4 \qquad P(J|A_3) = 0.5 \qquad P(J|A_4) = 0.7 \qquad P(J|A_5) = 0.9$

Nekünk a $P(A_5 \mid S)$ feltételes valószínűséget kell meghatároznunk. Tekintettel arra, hogy

$$P(A_5 \mid S) = \frac{P(A_5 \cap S)}{P(S)},$$

ezért az 1. lépésben a P(S) valószínűséget határozzuk meg. Ezt kétféleképpen is megtehetjük. Mindkét esetben a teljes valószínűség tételével dolgozunk. A teljes valószínűség tétele szerint

$$P(S) = P(S|A_1)P(A_1) + P(S|A_2)P(A_2) + P(S|A_3)P(A_3) + P(S|A_4)P(A_4) + P(S|A_5)P(A_5).$$

A komplementer-formula alapján

$P(S|A_1) = 0.4 \qquad P(S|A_2) = 0.6 \qquad P(S|A_3) = 0.5 \qquad P(S|A_4) = 0.3 \qquad P(S|A_5) = 0.1,$

következésképpen

$$P(S) = 0.15x0.4 + 0.1x0.6 + 0.2x0.5 + 0.3x0.3 + 0.25x0.1 = \mathbf{0.335},$$

A 2. lépésben a $P(A_5 \cap S)$ együttes valószínűséget kell meghatároznunk, mely a szorzási szabály szerint $P(A_5 \cap S) = P(S|A_5)\, P(A_5) = 0.025$. A két részlet számítás felhasználásával adódik a válasz:

$$P = P(A_5 \mid S) = \frac{P(A_5 \cap S)}{P(S)} = \frac{0.025}{0.335} = \mathbf{0.0746}.$$

A2. Feladat. Négy termelőtől szállítanak almát egy üzletbe. Az egyes termelők az összmennyiségnek 15, 20, 40 és 25 %-át adják. A beszállított árú 60, 50, 40 és 90 %-a első osztályú. Kiválasztunk találomra egy almát és az nem első osztályú. Mi a valószínűsége annak, hogy ezt az almát nem a negyedik termelő szállította?

Megoldás:

$$P(S) = 0.15x0.4 + 0.2x0.5 + 0.4x0.6 + 0.25x0.1 = \mathbf{0.425}$$

$$P = P(\overline{A}_4 \mid S) = 1 - P(A_4 \mid S) = 1 - \frac{P(A_4 \cap S)}{P(S)} = 1 - \frac{0.6}{0.425} = \mathbf{0.94176}$$

A3. Feladat. Öt termelőtől szállítanak uborkát egy üzletbe. Az egyes termelők az összmennyiségnek 15, 10, 20, 30 és 25 %-át adják. A beszállított árú 70, 40, 50, 60 és 80 %-a első osztályú. Kiválasztunk találomra egy uborkát és az nem első osztályú. Mi a valószínűsége annak, hogy ezt az uborkát nem a harmadik termelő szállította?

Megoldás:

$$P(S) = 0.15x0.3 + 0.1x0.6 + 0.2x0.5 + 0.3x0.4 + 0.25x0.2 = 0.3750,$$

$$P = P(\overline{A}_3 \mid S) = 1 - P(A_3 \mid S) = 1 - \frac{P(A_3 \cap S)}{P(S)} = 1 - \frac{0.1}{0.375} = \frac{0.275}{0.375} = \mathbf{0.7333}.$$

A4. Feladat: Négy automata gépsor ugyanazt a terméket állítja elő. Az egyes gépek minőségi paramétere 5, 3, 4, 6 selejtszázalék. Az egyes gépek a napi termelés 15, 30, 35, 20 %-át adják. A műszak végén egy terméket a napi termelésből találomra kiválasztanak és az selejtesnek bizonyult. Mi a valószínűsége annak, hogy ezt a terméket a 2. vagy a 4. gép készítette?

Megoldás:

$$P(S) = 0.15x0.05 + 0.3x0.03 + 0.35x0.04 + 0.2x0.06 = 0.0425$$

$$P = P(A_2 \cup A_4 \mid S) = \frac{0.0210}{0.0425} = \mathbf{0.4941}.$$

Probléma. El kell döntenünk, hogy megtakarított pénzünket ingatlanba (A1), részvénybe (A2), vagy valamilyen áruba (A3) fektessük-e be 1 éves futamidőre. Az 1 év múlva lehetséges világállapotokról van elképzelésünk: erőteljes gazdasági növekedés (S1), mérsékelt gazdasági növekedés (S2), változatlan gazdasági helyzet (S3), recesszió (S4). Az egyes világállapotok bekövetkezési valószínűségéről is van elképzelésünk. Döntésünket az alábbi hozaminformációk és valószínűségi becslés alapján kell meghoznunk. Célunk a várható hozam maximalizálása.

	S1	S2	S3	S4	értékelés
A1	8%	6%	5%	3%	
A2	15%	12%	8%	-2%	
A3	17%	10%	5%	-4%	
P(Si)	0.3	0.4	0.1	0.2	

Miután döntésünket meghoztuk, de pénzünket még nem kötöttük le, jött a hír, hogy a világ vezető pénzpiacai kritikus helyzetben vannak. Ez a hír az érintett gazdasági környezet lehetséges jövőbeli állapotai bekövetkezési valószínűségeinek újragondolására késztet. Ehhez korábbi tapasztalatok is kellenek, nevezetesen meg kell tudni ítélni, hogy egy prognosztizált pénzpiaci világválság milyen mértékben gyűrűzik be az érintett gazdaságba függően attól, hogy a gazdaság éppen milyen állapotban van. Ezeket az ítéleteket tartalmazza a következő adatsor:

P(V | Si)	0.1	0.6	0.7	0.9	

Hogyan revideáljuk ezek után a döntésünket? Hogyan rangsoroljuk az egyes alternatívákat, feltételezve, hogy a válság eléri az adott gazdasági térséget is?

Probléma: Miképpen befolyásolják a vizsgáztató tanár kezdeti bizonytalanságát - készült-e a hallgató vagy sem - a hallgató feleletei?

Elemzés: Jelölje A a tanár azon feltételezését, hogy a diák készült, $\overline{A}$ pedig azt, hogy nem készült. A tanár kezdeti bizonytalanságának mértéke attól függ, hogy mekkora valószínűséget tulajdonít az egyes hipotézisek helytálló voltának.

Tegyük fel, hogy a tanár sokéves tapasztalata alapján arra a megállapításra jutott, hogy a hallgatók 60%-a szokott felkészülni, azaz a P(A) valószínűséget 0.6-nak véli. $P(\overline{A})$ értéke ekkor 0.4. Ezeket a valószínűségeket nevezzük ***előzetes*** (*a priori*) valószínűségeknek.

A vizsgáztatás célja, hogy a tanár új információ birtokába jusson, melynek felhasználásával revideálhatja az előzetes valószínűségeket és meghatározhatja annak valószínűségét hogy a vizsgázó készült-e vagy sem. Ezeket a "revideált" valószínűségeket nevezzük utólagos (a posteriori) valószínűségeknek.

A tanárnak természetesen valamilyen elképzeléssel kell rendelkeznie arról is, hogy mekkora diagnosztikus értéke van egy jó feleletnek: mennyire valószínű, hogy készült, ha jól felelt? Tételezzük fel, hogy a tanár úgy vélekedik, hogy ha valaki készült, akkor a kérdések 90%-ára tud felelni, ha viszont nem készült, akkor csak 20%-ára.

Jelölje B azt az eseményt, hogy a vizsgázó a tanár által feltett két kérdésre jó választ adott. Ekkor a $P(B|A)$ valószínűséget $0.9\times0.9 = 0.81$ -nek tartja, a $P(B|\overline{A})$ valószínűséget pedig $0.2\times0.2 = 0.04$ -nek véli.

A jól ismert Bayes-formula (Bayes-tétel) szerint

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = 0.968$$

annak valószínűsége, hogy a két helyes válasz a vizsgázó felkészültségét jelenti