A Monte Carló módszer (a szimuláció) alapgondolata

Feladat: Számítsuk ki az $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integrált.

Nehézség: Az integrandusznak van ugyan primitív függvénye, de nem adható meg elemi függvények segítségével, következésképpen a Newton-Leibniz képletet nem tudjuk segítségül hívni.

Szimuláció: Konstruáljuk meg a következő kísérletet: „kérjünk" egy véletlenszám generátortól két 0 és 1 közé eső véletlen számot, először egy x, azután egy y értéket. A véletlenszám generátor egyenletesen adogatja ezeket a számokat. A kísérlet *eredménye* egy (x,y) szám pár, ahol $0 \leq x \leq 1$, és $0 \leq y \leq 1$. A kísérletnek annyi lehetséges ***kimenetele*** van, ahány ilyen számpár létezik. Ezeket a számpárokat felfoghatjuk, mint egy egységnégyzet pontjai. Ez az egységnégyzet *reprezentálja* a fent leirt, mesterségesen előidézett (szimulált) véletlen tömegjelenség ***eseményterét***.

Jelentse A azt az eseményt, amely akkor következik be, ha $y \leq e^{-x^2}$. A tekintett szimulált véletlen tömegjelenséget olyan geometriai modellel írhatjuk le, ahol a $P(A) = \lambda t(A)$ arányossági feltételt elfogadhatjuk „valóságosnak". Ebből adódik a „szokásos" képlet:

$$P(A) = \frac{t(A)}{t(\Omega)},$$

ahol t a területet jelenti, Ω pedig az eseményteret. Mivel ebben a modellben $t(\Omega) = 1$, ezért itt és most $P(A) = t(A)$. De a t(A) nem más, mint a szóban forgó integrál!

$$t(A) = \int_0^1 e^{-x^2}dx .$$

De az elmondottak szerint az is igaz, hogy $\int_0^1 e^{-x^2}dx = P(A)$.

Ez az összefüggés az alapja a következő számítógépes technikának: a mesterségesen megkonstruált véletlen tömegjelenség nagyon sok alkalommal való megismétlése segítségével relatív gyakoriságot számolunk, pontosabban az A esemény bekövetkezésének relatív gyakoriságát, melyet jelöljünk a „szokásos" módon k/n-nel. A nagy számok Bernoulli féle törvényéből tudjuk (lásd később), hogy nagy n esetén ezek a relatív gyakoriság értékek nagyon jól közelítik a valószínűséget, azaz

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = P(A) \approx \frac{k}{n}.$$

A szóban forgó integrál „megfelelően pontos" közelítő értékét meghatározhatjuk tehát egy mesterségesen konstruált véletlen tömegjelenség sokszori megismétlése révén.