5. A teljes valószínűség tétele. A Bayes tétel. Egy befektetői döntés.

A teljes valószínűség tétele:

- Ha $A_1, A_2, \ldots$ páronként kizáró és pozitív valószínűségű események sorozata, és ezek összege 1, B pedig egy tetszőleges esemény, akkor:

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

- Biz: Legyen

$$A = \sum_i A_i \ ekkor\ mivel\ P(A) = 1 \rightarrow P(\bar{A}) = 0\ tehát$$

$$P(B) = P(A * B) + P(A * \bar{B}) = P(A * B) = P\left(\left(\sum_i A_i\right) * B\right) = P\left(\sum_i B * A_i\right)$$

$$= \sum_i P(B * A_i) \equiv \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

Bayes tétel: Ha az esemény bekövetkezésének ismerete mellett azt akarjuk tudni, hogy egy teljes eseményrendszer eseményei mekkora valószínűséggel játszottak közre ebben.
A tétel: Legyen $B_1, B_2, \ldots$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, A pedig tetszőleges pozitív valószínűségű esemény. Ekkor k = 1,2,… esetén

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Biz: A feltételes valószínűség szorzási tétele alapján:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}$$

A teljes valószínűség tétele alapján a nevező P(A)-ja helyettesíthető

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)}$$

5

Probléma. El kell döntenünk, hogy megtakarított pénzünket ingatlanba (A1), részvénybe (A2), vagy valamilyen áruba (A3) fektessük-e be 1 éves futamidőre. Az 1 év múlva lehetséges világállapotokról van elképzelésünk: erőteljes gazdasági növekedés (S1), mérsékelt gazdasági növekedés (S2), változatlan gazdasági helyzet (S3), recesszió (S4). Az egyes világállapotok bekövetkezési valószínűségéről is van elképzelésünk. Döntésünket az alábbi hozaminformációk és valószínűségi becslés alapján kell meghoznunk. Célunk a várható hozam maximalizálása.

	S1	S2	S3	S4	értékelés
A1	8%	6%	5%	3%	
A2	15%	12%	8%	-2%	
A3	17%	10%	5%	-4%	
P(Si)	0.3	0.4	0.1	0.2	

Miután döntésünket meghoztuk, de pénzünket még nem kötöttük le, jött a hír, hogy a világ vezető pénzpiacai kritikus helyzetben vannak. Ez a hír az érintett gazdasági környezet lehetséges jövőbeli állapotai bekövetkezési valószínűségeinek újragondolására késztet. Ehhez korábbi tapasztalatok is kellenek, nevezetesen meg kell tudni ítélni, hogy egy prognosztizált pénzpiaci világválság milyen mértékben gyűrűzik be az érintett gazdaságba függően attól, hogy a gazdaság éppen milyen állapotban van. Ezeket az ítéleteket tartalmazza a következő adatsor:

P(V | Si)	0.1	0.6	0.7	0.9	

Hogyan revideáljuk ezek után a döntésünket? Hogyan rangsoroljuk az egyes alternatívákat, feltételezve, hogy a válság eléri az adott gazdasági térséget is?

Probléma: Miképpen befolyásolják a vizsgáztató tanár kezdeti bizonytalanságát - készült-e a hallgató vagy sem - a hallgató feleletei?

Elemzés: Jelölje A a tanár azon feltételezését, hogy a diák készült, $\overline{A}$ pedig azt, hogy nem készült. A tanár kezdeti bizonytalanságának mértéke attól függ, hogy mekkora valószínűséget tulajdonít az egyes hipotézisek helytálló voltának.

Tegyük fel, hogy a tanár sokéves tapasztalata alapján arra a megállapításra jutott, hogy a hallgatók 60%-a szokott felkészülni, azaz a P(A) valószínűséget 0.6-nak véli. $P(\overline{A})$ értéke ekkor 0.4. Ezeket a valószínűségeket nevezzük ***előzetes*** (*a priori*) valószínűségeknek.

A vizsgáztatás célja, hogy a tanár új információ birtokába jusson, melynek felhasználásával revideálhatja az előzetes valószínűségeket és meghatározhatja annak valószínűségét hogy a vizsgázó készült-e vagy sem. Ezeket a "revideált" valószínűségeket nevezzük utólagos (a posteriori) valószínűségeknek.

A tanárnak természetesen valamilyen elképzeléssel kell rendelkeznie arról is, hogy mekkora diagnosztikus értéke van egy jó feleletnek: mennyire valószínű, hogy készült, ha jól felelt? Tételezzük fel, hogy a tanár úgy vélekedik, hogy ha valaki készült, akkor a kérdések 90%-ára tud felelni, ha viszont nem készült, akkor csak 20%-ára.

5.

Jelölje B azt az eseményt, hogy a vizsgázó a tanár által feltett két kérdésre jó választ adott. Ekkor a $P(B|A)$ valószínűséget $0.9 \times 0.9 = 0.81$ -nek tartja, a $P(B|\overline{A})$ valószínűséget pedig $0.2 \times 0.2 = 0.04$ -nek véli.

A jól ismert Bayes-formula (Bayes-tétel) szerint

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = 0.968$$

annak valószínűsége, hogy a két helyes válasz a vizsgázó felkészültségét jelenti