20. A Markov és Csebisev egyenlőtlenségek

Egy valószínűségi változó a saját várható értéke körül ingadozik, s az ingadozásoknak egyik lehetséges mértéke a szórás. A következő egyenlőtlenségek pontosabb értéket adnak erről az ingadozásról.

Markov-egyenlőtlenség:
Legyen Y olyan valószínűségi változó, melynek ∃E(Y)≥ 0 . Ekkor:

$$\forall\delta > 0 \; P(Y > \delta) \leq \frac{E(Y)}{\delta}$$

azaz δ növelésével egyre csökken annak a valószínűsége, hogy Y δ-nál nagyobb értéket vesz fel.
Bizonyítás diszkrét esetben:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i \geq \sum_{x_i \geq \delta}^{\infty} x_i P_i \geq \delta \cdot \sum_{Z_i \geq \delta}^{\infty} P_i = \delta P(Y \geq \delta)$$

Bizonyítás folytonos esetben:

$$E(Y) = \int_{0}^{\infty} x\, f(x) dx \geq \int_{\delta}^{\infty} x\, f(x) dx \geq \delta \int_{\delta}^{\infty} f(x) dx = \; \delta \cdot P(Y \geq \delta)$$

Csebisev-egyenlőtlenség:
Legyen X valószínűségi változó, melynek σ^2(x)<∞ (véges a szórásnégyzete), ekkor:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad P\big(|X - E(X)| \geq \lambda \cdot \sigma(X)\big) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

azaz annak a valószínűsége, hogy X a várható értéktől a szórásnál pl. 10-szer nagyobb értékkel tér el kisebb, mint 0,01.
Bizonyítás: alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget X helyett az $(X-E(X))^2$ valószínűségi változóra, és k helyett k^2-re. Ekkor:

$$P(|X - E(X)| \geq k) = P[\big(X - E(X)\big)^2 \geq k^2] \leq \frac{E(X - E(X))^2)}{k^2}$$