12.

Minimális kockázatú portfolió meghatározása

1 milliárd forintot akarunk részvényvásárlásra fordítani. Két részvény, A illetve B megvásárlása jöhet szóba. Tegyük fel, hogy az „A" jelű részvények vásárlására fordított pénzösszeg egy éves hozama X %, a „B" jelű részvények vásárlására fordított pénzösszeg egy éves hozama Y %. Az X és Y értékére vonatkozóan különböző tanácsadó cégek különböző becsléseket adtak. A 100 legjobb tanácsadó cég „tippjeit" az alábbi ***gyakorisági táblázat*** tartalmazza:

$X \backslash Y$	$y_1 = -30$	$y_2 = -20$	$y_3 = 10$	$y_4 = 30$	$y_5 = 40$
$x_1 = -20$	0	5	5	0	0
$x_2 = -10$	5	5	20	10	0
$x_3 = 30$	5	10	10	10	5
$x_4 = 40$	0	0	5	0	5

Határozzuk meg a legkisebb kockázattal járó pénzbefektetési kombinációt (portfoliót), vagy más szóval, állapítsuk meg, hogy hány forintért vegyünk A részvényt és hány forintért pedig B részvényt, ha elsődleges célunk a kockázat minimalizálása. Mekkora a várható hozama és varianciája az optimális portfoliónak?

Megoldás: Transzformáljuk a „gyakorisági táblázatot" relatív gyakorisági táblázattá:

$X \backslash Y$	$y_1 = -30$	$y_2 = -20$	$y_3 = 10$	$y_4 = 30$	$y_5 = 40$
$x_1 = -20$	0	0.05	0.05	0	0
$x_2 = -10$	0.05	0.05	0.2	0.1	0
$x_3 = 30$	0.05	0.1	0.1	0.1	0.05
$x_4 = 40$	0	0	0.05	0	0.05

A relatív gyakoriságot elfogadva valószínűségekként, ezzel a táblázattal úgy dolgozunk, mint az (X,Y) vektorváltozó együttes eloszlásával.

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre álló pénzünk α hányadát ($0 \le \alpha \le 1$) szándékozunk az „A" jelű részvénybe fektetnünk, a fennmaradó összegen pedig „B" jelű részvényt vásárolunk. Pénzünket egységnyinek tekintve ekkor $Z(\alpha) = \alpha X + (1-\alpha)Y$ lesz a portfoliónk hozama.

Pénzügyi döntésünket a variancia alapján hozzuk, mivel a variancia egyúttal alkalmas a kockázat mértékét is kifejezni. A portfolió varianciájának kiszámítására a következő képlet szolgál:

$$\mathrm{var}(Z(\alpha)) = \mathrm{var}(X)\alpha^2 + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)\alpha(1-\alpha) + \mathrm{var}(Y)(1-\alpha)^2.$$

(12)

A szükséges var(X), var(Y) és cov(X,Y) mennyiségek meghatározásához szükségünk van a fenti táblázat „peremezésére", azaz a perem-eloszlások meghatározására is.

X \ Y	$y_1 = -30$	$y_2 = -20$	$y_3 = 10$	$y_4 = 30$	$y_5 = 40$	p_i
$x_1 = -20$	0	0.05	0.05	0	0	0.1
$x_2 = -10$	0.05	0.05	0.2	0.1	0	0.4
$x_3 = 30$	0.05	0.1	0.1	0.1	0.05	0.4
$x_4 = 40$	0	0	0.05	0	0.05	0.1
p_j	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	1

Ebből a „peremezett" eloszlás-táblázatból kiszámíthatók a következő adatok:

$$E(X) = 10, \quad E(X^2) = 600, \quad E(Y) = 7, \quad E(Y^2) = 550, \quad E(XY) = 160.$$

Ezekből az adatokból számíthatjuk ki a var(X), var(Y) és cov(X,Y) mennyiségeket.

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = 500, \quad \mathrm{var}(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 501$$

és

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 90.$$

A portfolió varianciája tehát a következő:

$$f(\alpha) = \mathrm{var}(Z(\alpha)) = 500\alpha^2 + 180\alpha(1-\alpha) + 501(1-\alpha)^2.$$

Ez egy α-ban másodfokú függvény. Szélsőértékét analitikus módszerrel a legegyszerűbb meghatározni:

$$f'(\alpha) = 1642\alpha - 822 \quad \text{és} \quad f''(\alpha) = 1642.$$

A második derivált mutatja, hogy konvex függvényről van szó, az első deriváltnak egyetlen zérushelye van $\alpha_0 = \dfrac{822}{1642} = 0.500609013$.

Eszerint 500 millió 609 ezer 013 forintért kell „A" jelű és 499 millió 390 ezer 987 forintért „B" jelű részvényt vásárolnunk. Ekkor a legkisebb a kockázat, varianciában mérve

$$\mathrm{var}(0.5X + 0.5Y) = 295.25.$$

Az optimális portfolió várható hozama:

$$E(0.5X + 0.5Y) = 0.5E(X) + 0.5E(Y) = 0.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 7 = 5 + 3.5 = 8.5.$$

12

Minimális kockázatú portfolió kiszámítása II

P1. Feladat. 1 milliárd forintot szándékozunk részvény vásárlására fordítani. Két értékpapír megvásárlása jöhet szóba. A szakértői előrejelzések szerint az egyes részvényekre vonatkozó adatok a következők:

	várható hozam	a hozam szórása
1. részvény (X)	$E(X) = 13$	$D(X) = 15$
2. részvény (Y)	$E(Y) = 9.5$	$D(Y) = 13$

Ismert továbbá a hozam-változók korrelációja: $R(X,Y) = 0.2$. Határozza meg a minimális kockázatú befektetési kombinációt és számítsa ki annak várható hozamát és varianciáját.

Válasz: Jelölje a portfolió hozamát $Z = pX + (1-p)Y$.

Mivel $\mathrm{Var}(Z(p)) = 316p^2 - 260p + 169$, ezért $p_{opt} = \dfrac{260}{632} = 0{,}4114$,

$E(Z_{opt}) = 0{,}4114 \cdot 15 + 0{,}5886 \cdot 13 = 10{,}9399$ és $\mathrm{var}(Z_{opt}) = 115{,}5190$.

P2. Feladat. 1 milliárd forintot szándékozunk részvény vásárlására fordítani. Két értékpapír megvásárlása jöhet szóba. A szakértői előrejelzések szerint az egyes részvényekre vonatkozó adatok a következők:

	várható hozam	a hozam szórása
1. részvény (X)	$E(X) = 12$	$D(X) = 12$
2. részvény (Y)	$E(Y) = 14$	$D(Y) = 15$

Ismert továbbá a hozam-változók korrelációs együtthatója: $R(X,Y) = -0.5$. Határozza meg a minimális kockázatú befektetési kombinációt és számítsa ki annak várható hozamát és varianciáját.

Válasz: Jelölje a portfolió hozamát $Z = pX + (1-p)Y$.

Mivel $\mathrm{Var}(Z(p)) = 549p^2 - 630p + 225$, ezért $p_{opt} = \dfrac{630}{1098} = 0{,}5753$,

$E(Z_{opt}) = 0{,}5735 \cdot 12 + 0{,}4263 \cdot 14 = 12{,}8526$ és $\mathrm{var}(Z_{opt}) = 44{,}2623$.