

11. A várható érték fogalma és alapvető tulajdonságai. Transzformációs képletek. A várható érték, mint lineáris funkcionál. Összeg, számszoros és szorzat várható értéke.

Várható érték: Ha egy valószínűségi változóra vonatkozólag független kísérletsorozatot végzünk, akkor a változó által felvett értékek egy meghatározott érték körül ingadoznak, ez a várható érték.

Jele:  $E(x)$  ami az  $X$  valószínűségi változó értékeinek súlyozott átlaga

$$E(x) = p_1 * x_1 + p_2 * x_2 + \dots + p_n * x_n = \sum_{i=1}^n P_i * x_i \text{ ahol } P_i = P(x = x_i)$$

- Ha  $X$  értékkészlete végtelen sok elemből áll (tehát nem diszkrét), és az  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  értékeket rendre  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  valószínűséggel veszi fel, akkor ha  $\sum_{i=1}^{\infty} P_i * x_i$  konvergens, azaz  $\sum_{i=1}^{\infty} P_i * |x_i| < \infty$ , a várható érték:  $E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i * x_i$
- Folytonos esetben:  $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx$

k-adik momentum: jele  $x^k$

- diszkrét esetben:

$$E(x^k) = \sum_{i=1}^n P_i * x_i^k$$

- folytonos esetben:  $E(x^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k * f(x) dx$

Valószínűségi változó transzformáltja:

$X, Y$  valószínűségi változók,  $Y = r(X)$ : ekkor  $Y$  az  $X$  fv transzformáltja  $r$  szerint

- várható értékek:
  - o diszkrét esetben:

$$E(Y) = E(r(x)) = \sum_{i=1}^n P_i * r(x_i)$$

- o folytonos esetben:  $E(Y) = E(r(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) * f(x) dx$
- ezekből:
  - o számszoros várható értéke:

$$E(c * x) = \sum_{i=1}^n P_i * c * x_i = c * \sum_{i=1}^n P_i * x_i = c * E(x)$$

$$E(c * x) = \int_{-\infty}^{\infty} c * x * f(x) dx = c * \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx = c * E(x)$$

- o összeg várható értéke:

$$E(x + y) = \sum_{i=1}^n P_i * (y_i + x_i) = \sum_{i=1}^n P_i * y_i + \sum_{i=1}^n P_i * x_i = E(y) + E(x)$$

$$E(x + y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) * f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} y * f(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx$$

$$= E(y) + E(x)$$

- o szorzat várható értéke:

$$E(x * y) = E(y) * E(x)$$

- Mivel az összeg és a számszoros a fenti eredményeket adja, ezért a várható érték egy lineáris leképezés (ebben az esetben funkcionál ami az jelenti hogy függvényhez rendel számot)