Kombinatorikai feladatok

1. Feladat: Egy minőségellenőr 700 azonos termékből találomra kiválaszt 9-et (visszatevés nélkül). Az 700 termék közül 45 selejtes, a többi megfelel az előírásoknak. Mi a valószínűsége, hogy a megvizsgált termékek között legalább kétszer annyi a hibátlan, mint a selejtes?

Megoldás: A mintavételi feladat modellezésekor a lehetséges mintákat (a véletlen jelenség lehetséges kimeneteleit, az eseménytér elemeit) a 700 különböző termékből képezhető 9-ed osztályú kombinációkként azonosíthatjuk. Ismert kombinatorikai tétel szerint ennek a véletlen jelenségnek

$$\binom{700}{9}$$

lehetséges kimenetele van, ennyi elemből áll tehát a vizsgált véletlen jelenség H eseménytere. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a kiválasztott termékek között pontosan i számú hibátlan található. A feladat az $A_9 \cup A_8 \cup A_7 \cup A_6$ esemény P valószínűségének a kiszámítása. Mivel ezek az események egymást páronként kizáróak, ezért alkalmazható a következő összefüggés:

$$P = P(A_9) + P(A_8) + P(A_7) + P(A_6)$$

A $P(A_i)$ valószínűséget a klasszikus képlet alapján számíthatjuk, hiszen a mintavételi eljárásnak olyannak kell lennie, hogy teljesüljön az „egyenlő esély” elve. H számosságát már tudjuk az A_i események $|A_i|$ számosságára van már csak szükségünk. Mikor következik be az A_i esemény? Ha a mintában pontosan i számú hibátlan és pontosan (9 – i) számú selejtes termék található.

Az előbbiek $\binom{655}{i}$ féleképpen az utóbbiak, pedig $\binom{45}{9-i}$ féleképpen adódatnak, egymástól teljesen függetlenül. A kedvező estek számát ennek a két kombinációs számnak a szorzata adja. A feladatra adandó válasz tehát a következő:

$$P = \frac{\binom{45}{0}\binom{655}{9}}{\binom{700}{9}} + \frac{\binom{45}{1}\binom{655}{8}}{\binom{700}{9}} + \frac{\binom{45}{2}\binom{655}{7}}{\binom{700}{9}} + \frac{\binom{45}{3}\binom{655}{6}}{\binom{700}{9}}$$

2. Feladat: Egy minőségellenőr 300 azonos termékből találomra kiválaszt 12-t (visszatevéssel!). A 300 termék közül 60 selejtes, a többi megfelel az előírásoknak. Mi a valószínűsége, hogy a megvizsgált termékek legalább 72%-a hibátlan?

Megoldás: A mintavételi eljárás lehetséges kimeneteleit egy 300 elemű halmaz 12-ed osztályú ismétléses variációiként reprezentálhatjuk. Az eseménytér számossága, ismert kombinatorikai tétel szerint 300^{12}.

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a 12 elemű mintában i számú hibátlan termék található. A feladat szerint az $A = A_{12} \cup A_{11} \cup A_{10} \cup A_9$ esemény valószínűségét kell meghatároznunk. Mivel a szóban forgó események egymást páronként kizárják, ezért alkalmazható az „addíciós formula" $P(A) = P(A_{12}) + P(A_{11}) + P(A_{10}) + P(A_9)$.

A $P(A_i)$ valószínűség meghatározásához a klasszikus képletet használjuk, hiszen minden mintavételi eljárásnak (elvben legalább is) garantálnia kell az „egyenlő esély" elvének érvényre jutását. Szükségünk van tehát az A_i halmaz számosságára (a kedvező estek számára).

Mivel minden lehetséges kimenetel egy 12 komponensből álló sorozat, ahol számít a sorrend is, ezért a következőképpen okoskodhatunk: ha azt akarom, hogy a mintába pontosan i számú hibátlan termék kerüljön, akkor első lépésben el kell döntenem, hogy mely komponensek legyenek hibátlanok. Ez az első lépés $\binom{12}{i}$ féleképpen végezhető el. Ha már kijelöltük a „hibátlan" komponenseket, akkor ezek mindegyikére 240 féleképpen választhatok. A fennmaradó (12 - i) selejtes komponens mindegyikére 60 féleképpen választhatok. Megkapom a keresett számosságot, ha ezeknek a „parciális lehetőségeknek" a számát összeszorzom. E szerint

$$|A_i| = \binom{12}{i} 240^i 60^{12-i} \quad \text{és} \quad P(A_i) = \binom{12}{i} \frac{240^i 60^{12-i}}{300^{12}},$$

illetve a feladatra adandó válasz:

$$P = \sum_{i=9}^{12} \binom{12}{i} \frac{240^i 60^{12-i}}{300^{12}} = \sum_{i=9}^{12} \binom{12}{i} \left(\frac{240}{300}\right)^i \left(1 - \frac{240}{300}\right)^{12-i}$$

3. Feladat: Egy urnában 430 golyó van, melyek közül 280 fehér, a többi fekete. Találomra kiválasztunk 125-öt. Mi a valószínűsége, hogy a golyók nem mind azonos színűek?

Megoldás: Jelölje W azt az eseményt, hogy minden golyó fehér, B pedig azt, hogy minden golyó fekete. Az a valószínűség, melyet meg kell határoznunk ezek szerint a következő:

$$P(\overline{W \cup B}).$$

Ezt a valószínűséget a „komplementer-formula" segítségével könnyebb kiszámítani:

$$P(\overline{W \cup B}) = 1 - P(W \cup B) = 1 - \big(P(W) + P(B)\big).$$

(Az utolsó átalakításnál figyelembe vettük azt, hogy W és B egymást kizáró események!)

A vizsgált véletlen jelenség eseményterét azonosíthatjuk bármely 430 elemű halmazból képezhető 125-öd osztályú ismétlés nélküli kombinációk halmazával. Az eseménytér számossága, ismert kombinatorikai tétel szerint: $\binom{430}{125}$. Most a W és B halmazok számosságát kell meghatározni. W akkor következik be, ha csak fehér golyók közül választunk. Ezen lehetőségek száma $\binom{280}{125}$. Ha csak a fekete golyók közül választhatunk 125-öt, akkor a lehetőségek száma. A valószínűség kiszámításának klasszikus képletet alkalmazva, a kérdéses valószínűség a következő:

$$P = 1 - \frac{\binom{280}{125} + \binom{150}{125}}{\binom{430}{125}}.$$

4. Feladat: Egy szabályos dobókockával 4-szer dobunk egymás után. Mi a valószínűsége, hogy

(a) Mind a négy szám különböző?
(b) A négy szám közül 2-2 azonos?
(c) A négy szám között pontosan két különböző van?
(d) A négy szám között a 6-os nem fordul elő és az 5-ös is csak legfeljebb 1-szer?

Megoldás: Egy lehetséges kimenetel az {1, 2, 3, 4, 5, 6} számok egy lehetséges ismétléses variációja. Ennek következtében az eseménytér számossága: 6^4. A dobókocka szabályossága biztosítja a lehetséges kimenetelek „egyenlő esélyét”, ezért a klasszikus képlettel számolhatjuk valamennyi kérdéses valószínűséget.

a) Válasszunk ki a 6 számból négyet. Ezt $\binom{6}{4}$ féleképpen tehetjük meg. Ha kiválasztottunk a négy számot, akkor ezeket 4! = 1·2·3·4 (4 faktoriális!) féleképpen lehet sorba rendezni (permutáció!). Négy különböző szám előfordulásának lehetősége tehát: $\binom{6}{4}4!$, következésképpen

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4}4!}{6^4}.$$

b) Válasszunk ki 2 számot a 6-ból. Ez $\binom{6}{2}$ féleképpen tehető meg. Vegyünk mindegyikből egy „másod példányt” és tekintsük az így kapott 4 elemű rendszert (nem halmazt, mert nem különbözőek az elemek!) Ezt a négy elemet $\frac{4!}{2!2!}$ féleképpen lehet sorba rendezni (ismétléses permutáció!) Ebből már adódik a válasz:

$$P(B) = \frac{\binom{6}{2}\frac{4!}{2!2!}}{6^4},$$

c) Válasszunk ki 2 számot a 6-ból. Ez $\binom{6}{2}$ féleképpen tehető meg. Képezzük ennek a két számnak az összes 4-ed osztályú ismétléses variációját. Ezek száma 2^4. Ezek között kettő olyan van amelyikben csak egy szám fordul elő. A kedvező esetek száma tehát: $\binom{6}{2}\left(2^4 - 2\right)$. Ebből már adódik a válasz:

$$P(C) = \frac{\binom{6}{2}\left(2^4 - 2\right)}{6^4}.$$

d) Hány olyan eset van, ahol se a 6-os, se pedig az 5-ös nem fordul elő? Ezek száma 4^4 (négy elem 4-ed osztályú ismétléses variációi!). Ezekhez még hozzá kell vennünk azokat az ismétléses variációkat, melyekben nincs 6-os és egyetlen 5-ös van. Az 5-ös elhelyezkedésére 4-féle lehetőség van. Ha az 5-ös számot már elhelyeztük, akkor a fennmaradó négy számot kell a fennmaradó 3 komponensen variálni. Erre 4^3 lehetőségünk van. A kedvező esetek száma tehát: $4^4 + 4 \cdot 4^3$. Ebből már adódik a válasz:

$$P(D) = \frac{4^4 + 4 \cdot 4^3}{6^4}.$$

5. Feladat: Egy szabályos dobókockával 5-ször dobunk egymás után. Mi a valószínűsége, hogy

(a) Mind az öt szám különböző?
(b) A dobott számok összege nagyobb, mint 25?
(c) Az öt szám között pontosan két különböző van?
(d) Az öt szám között az 1-es illetve a 6-os is csak legfeljebb 1-szer fordul elő?

Megoldás:

$$P(A) = \frac{6!}{6^5}, \qquad P(B) = \frac{126}{6^5}, \qquad P(C) = \frac{\binom{6}{2}\left(2^5 - 2\right)}{6^5},$$

$$P(D) = \frac{4^5 + 2 \cdot 5 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4 \cdot 4^3}{6^5}.$$

6. Feladat: Egy urnában 250 golyó van, melyek közül 25 fekete, a többi piros. Találomra kiválasztunk 5-öt. Mi a valószínűsége, hogy

(a) Mind az 5 golyó azonos színű?
(b) Van a golyók között fekete is és piros is?
(c) Van a golyók között legalább 2 fekete és legalább 2 piros?
(d) A golyók között legalább 3 piros van?

Megoldás:

$$P(A) = \frac{\binom{225}{5}+\binom{25}{5}}{\binom{250}{5}}, \quad P(B) = 1 - P(A), \quad P(C) = \frac{\binom{25}{2}\binom{225}{3}+\binom{25}{3}\binom{225}{2}}{\binom{250}{5}},$$

$$P(D) = \frac{\binom{25}{2}\binom{225}{3}+\binom{25}{1}\binom{225}{4}+\binom{25}{0}\binom{225}{5}}{\binom{250}{5}}.$$

7. Feladat: Egy jól összekevert magyar kártya pakliból egymás után 8 lapot kihúzunk. Mi a valószínűsége, hogy

(a) Mind a négy színből pontosan 2-2 van?
(b) A négy szín közül csak 2 fordul elő?
(c) A 8 lap között 3 ász, 2 felső és 3 hetes van?
(d) A 8 lap között nincsen király és makk?

Megoldás:

$$P(A) = \frac{\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{2}8!}{32\cdot 31\cdots 25}, \qquad P(B) = \frac{\binom{4}{2}(16\cdot 15\cdots 9 - 8! - 8!)}{32\cdot 31\cdots 25},$$

$$P(C) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{3}8!}{32\cdot 31\cdots 25}, \qquad P(D) = \frac{21\cdot 20\cdots 14}{32\cdot 31\cdots 25}.$$

8. Feladat: Egy jól összekevert francia kártya pakliból egymás után 14 lapot kihúzunk. Mi a valószínűsége, hogy

(a) Mind a négy színből van legalább 1?
(b) A négy szín közül csak 3 fordul elő?
(c) A 14 lap között 3 ász, 2 király, 4 dáma, 3 bubi és 2 tízes van?
(d) A 14 lap között nincsen treff és ász?

Megoldás:

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{4}{2}\left[\binom{26}{14}\right]+\binom{4}{3}\left\{\binom{39}{14}-\binom{3}{2}\left[\binom{26}{14}\right]\right\}}{\binom{52}{14}}, \qquad P(B) = \frac{\binom{4}{3}\left\{\binom{39}{14}-\binom{3}{2}\left[\binom{26}{14}\right]\right\}}{\binom{52}{14}},$$

$$P(C) = \binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{4}\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{52}{14}^{-1}, \qquad P(D) = \frac{\binom{36}{14}}{\binom{52}{14}}.$$

9. Feladat: Egy urnában 300 golyó van, melyek közül 125 fekete, 75 piros, a többi zöld. Találomra kiválasztunk 15-öt. Mi a valószínűsége, hogy

(a) A 15 golyó közül 5 fekete, 5 piros és 5 zöld színű?
(b) Van a golyók között fekete is, piros is és zöld is?
(c) A golyók között csak két szín fordul elő?
(d) A golyók között legfeljebb 3 piros van?

Válasz:

$$P(A) = \frac{\binom{125}{5}\binom{75}{5}\binom{100}{5}}{\binom{300}{15}},$$

$$P(B) = 1 - \frac{\binom{175}{15}+\binom{225}{15}+\binom{200}{51}-\binom{125}{15}-\binom{75}{15}-\binom{100}{15}}{\binom{300}{15}},$$

$$P(C) = \frac{\left[\binom{200}{15}-\binom{125}{15}-\binom{75}{15}\right]+\left[\binom{225}{15}-\binom{125}{15}-\binom{100}{15}\right]+\left[\binom{175}{15}-\binom{100}{15}-\binom{75}{15}\right]}{\binom{300}{15}},$$

$$P(D) = \frac{\binom{225}{15}+\binom{75}{1}\binom{225}{14}+\binom{75}{2}\binom{225}{13}+\binom{75}{3}\binom{225}{12}}{\binom{300}{15}}.$$

10. Feladat: Egy szabályos dobókockával 7-szer dobunk egymás után. Mi a valószínűsége, hogy

(a) A dobott számok között mindegyik szám előfordul?
(b) A dobott számok összege kisebb, mint 10?
(c) A dobott számok között pontosan két különböző van?
(d) A hét szám között az 1-es illetve a 6-os is csak legfeljebb 1-szer fordul elő?

Megoldás:

$$P(A) = \frac{6\frac{7!}{2!}}{6^7}, \qquad P(B) = \frac{1+7+7+\binom{7}{2}}{6^7},$$

$$P(C) = \frac{\binom{6}{2}\left(2^7-2\right)}{6^7}, \qquad P(D) = \frac{4^7+2\cdot 7\cdot 4^6+7\cdot 6\cdot 4^5}{6^7}.$$

11. Feladat. Valaki két (hagyományos) lottószelvényt tölt ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy nyer, azaz valamelyik szelvényen legalább két találata lesz?

Megoldás: Jelölje A_k (k = 1,2) azt az eseményt, hogy a k-adik szelvénnyel nyerek. A keresett valószínűség tehát

$$P = P(A_1 \cup A_2).$$

Jelölje p a nyerés valószínűségét, ha egy szelvénnyel játszunk.

$$p = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3} + \binom{5}{3}\binom{85}{2} + \binom{5}{4}\binom{85}{1} + \binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}.$$

Ekkor $P(A_1) = P(A_2) = p$ és a függetlenség miatt $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p^2$. Ezekből egy jól ismert képlet szerint az adódik, hogy:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 2p - p^2.$$