18. Kovariancia, variancia és szórás. Alapvető tulajdonságok, transzformációs képletek. A kovarianciára vonatkozó nevezetes egyenlőtlenség. A korrelációs együttható.

Kovariancia: X, Y valószínűségi változó

$cov(x,y) = E(\,(x - E(x)) \cdot (y - E(y))\,)$ – milyen változást okoz a szórásban

Variancia: a szórás négyzete

$D^2(x) = E((x - E(x))^2) = cov(x,x)$ - ez jellemzi a szórási adatok eltérését átlaguktól

Szórás:

$D(x) = \sqrt{D^2(x)} = \sqrt{E(x) - E(x)^2}$ - a várható érték körüli ingadozás átlagos nagysága

Tulajdonságok:

$D^2(x)=E^2(x)$ ➔ $D^2(x)$ szükséges feltétele a várható érték meglétének

$D^2(x) = 0 \;\rightarrow E(x^2) \geq E^2(x)$

Ha x diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei x_1, x_2,… a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig P_1, P_2,… akkor:

$$D^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - E(x))^2 \cdot P_4 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot P_4 - (\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P_k)^2$$

Kovariancia tulajdonságok:

$|cov(x,y)| \leq D(x) \cdot D(y)$

Korrelációs együttható:

$$q(x,y) = \frac{cov(x,y)}{D(x) \cdot D(y)} = \frac{E(x,y) - E(x) \cdot E(y)}{D(x) \cdot D(y)}$$

Transzformáció: Az E(x) véghatárértékű és D(x) szórású x valószínűségi változó $Z = \frac{x - E(x)}{D(x)}$ transzformáltjának:

$$E(Z) = \frac{1}{D(x)} \cdot [E(x) - E(x)] = 0$$

$$D^2(Z) = \frac{1}{D^2(x) \cdot D^2} = 1$$

Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség:

cov(x,y)=<x,y>$_1$ és E(xy)=<x,y>$_2$ ekkor:

1. $< \alpha \cdot x + \beta \cdot y, z >_2 = E((\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \cdot z) = E(\alpha \cdot x \cdot z + \beta \cdot y \cdot z) = \alpha \cdot E(xz) + \beta \cdot E(yz) =$
$= \alpha < x, z >_2 + \beta < y, z >_2$ (linearitás)
2. $< x, x > \geq 0$ (pozitív definit)
3. $< x, x > = 0 \leftrightarrow x = 0$
4. $|cov(x,y)| \leq \sqrt{cov(x,x)} \cdot \sqrt{cov(x,y)} = D(x) \cdot D(y)$

vagyis: $< x, y_1^2 > \leq < x, x >_1 \cdot < y, y >_1$

➔$-D(x) \cdot D(y) \leq cov(x,y) \leq D(x) \cdot D(y)$

Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség:

cov(x,y) és E(x*y)-ra:

1. $E((\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \cdot z) = E(\alpha \cdot x \cdot z + \beta \cdot y \cdot z) = \alpha \cdot E(xz) + \beta \cdot E(yz)$
2. $cov(x,x) \geq 0$ (pozitív definit)
3. $< x, x > = 0 \leftrightarrow x = 0$
4. $|cov(x,y)| \leq \sqrt{cov(x,x)} \cdot \sqrt{cov(x,y)} = D(x) \cdot D(y)$

vagyis: $cov(x,y^2) \leq cov(x,x) \cdot cov(y,y) \rightarrow\rightarrow\rightarrow \; -D(x) \cdot D(y) \leq cov(x,y) \leq D(x) \cdot D(y)$