

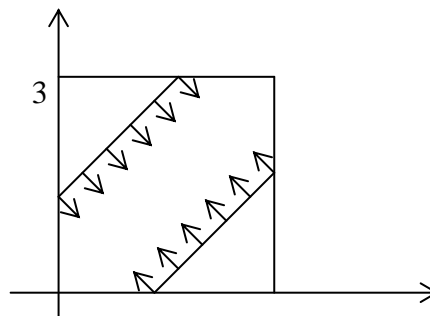
Geometriai valószínűségek

Találkozási probléma I. Egy cég telephelyére délután 3 óra és 6 óra között két kamion érkezését várják. A megérkezés időpontja teljesen véletlenszerű, de mindkét kamion az adott időintervallumban megérkezik. A telephelyen egy időben csak egy kamion tud rakodni, addig a másiknak várakoznia kell.

Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyik kamion várakozásra kényszerül, ha egy kamion rakodási ideje 1 óra? Modellezze a feladatot!

Válasz: $P(\text{várakozás}) = \frac{5}{9}$.

Megoldás: Jelölje x az 1. kamion, y pedig a 2. kamion megérkezésének időpontját. A dolog lényegén nem változtatunk, ha a 3 órától 6 óráig terjedő idő-intervallumot azonosítjuk a $[0, 3]$ számintervallummal. Az adott jelenség kimenetelei tehát olyan (x, y) számpárokkal azonosíthatók, melyek mindkét komponense 0 és 3 között van. Az eseménytér modelljeként tekinthetjük a Descartes-sík 3 egység hosszúságú négyzetét



Várakozás akkor következik be, ha $|x - y| < 1$. A várakozás eseményt a eseménytér-négyzetnek a jelölt hatszög tartománya reprezentálja. A hatszög-tartomány és az eseménytér-négyzet területének hányadosa adja a keresett valószínűséget. A „nem várakozás” valószínűségét könnyebb kiszámítani. A „hatszög-tartomány” komplementerének területe egy 2 egység alapú négyzet területével megegyező. A hatszög-tartomány területe ezek szerint 5 területegység. Ebből már közvetlenül következik a válasz:

$$P(\text{várakozás}) = \frac{5}{9}.$$

Találkozási probléma II. Egy cég telephelyére reggel 6 óra és délután 16 óra között két kamion érkezését várják. A megérkezés időpontja teljesen véletlenszerű, de mindkét kamion az adott időintervallumban megérkezik. A telephelyen egy időben csak egy kamion tud rakodni, addig a másiknak várakoznia kell.

Mi a valószínűsége annak, hogy egyik kamionnak sem kell várakoznia, ha egy kamion rakodási ideje 2 óra? Modellezze a feladatot!

Válasz: $P(\text{nincs várákozás}) = \frac{64}{100}.$

Feladat. A $[0,1]$ intervallumból találmra kiválasztunk két pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont által meghatározott három szakaszból háromszög szerkeszthető?

Válasz: $P = \frac{1}{4} = \mathbf{0.25}.$

Megoldás: Jelölje x és y a két kiválasztott pontot. Az eseménytér modellezhető, mint egy egységoldalú négyzet. A vizsgálandó eseményt a következő feltételek határozzák meg: a háromszög szerkeszthetőségnek az a feltétele, hogy a három szakasz közül bármelyik kisebb legyen, mint a másik kettő összege. Válasszuk külön az $x < y$ illetve az $y < x$ eseteket.

- a) Legyen $x < y$. Ekkor a keletkezett három szakasz hossza a következő: x , $y - x$ és $1 - y$. A háromszög-egyenlőtlenség szerint a következő feltételeknek teljesülni kell:

$$x < (y - x) + (1 - y) = 1 - x,$$

$$y - x < x + 1 - y,$$

$$1 - y < x + y - x.$$

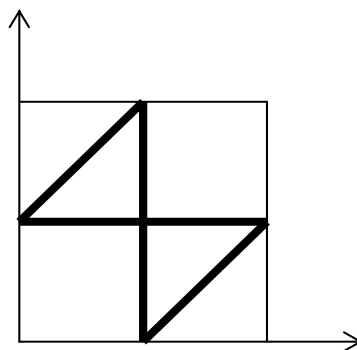
Ez az egyenlőtlenség rendszer ekvivalens a következővel:

$$x < 1/2, \quad y > 1/2 \quad \text{és} \quad y < x + 1/2.$$

- b) Legyen most $x > y$. Az előbbivel teljesen megegyező módon a következő feltételrendszer adódik:

$$y < 1/2, \quad x > 1/2 \quad \text{és} \quad y > x - 1/2.$$

Jelenítsük meg a kedvező eseménynek megfelelő részhalmazát az esemény-térnek:



A vastag vonallal körbezárt tartomány reprezentálja a szóban forgó eseményt. Területe negyede a négyzet területének, ennélfogva $P = \frac{1}{4} = \mathbf{0.25}.$