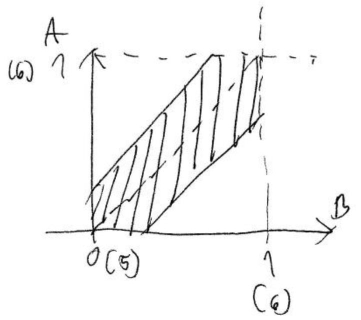
8. Geometriai valószínűségi mezők. A találkozási probléma. Riemann integrál kiszámítása szimulációval: a Monte Carlo módszerek alapgondolata.

Geometriai valószínűségi mezők:

- TFH egy véletlen jelenség eseményterét (Ω) egy geometriai alakzattal lehet reprezentálni. Ebből következik, hogy minden A Ω-beli esemény is geometriai alakzat.
- Ω eseménytér egy geometriai alakzat ami nem megszámlálható ponthalmazhoz rendelt elemi események halmaza is lehet. (A geometriai alakzat pont ilyen nem megszámlálható mennyiségű pontból álló ponthalmaz.)
- Feltesszük, hogy az Ω eseménytérben annak valószínűsége, hogy egy véletlen pont az A részhalmaza Q résztartományba essen, arányos az A tartomány mértékével (hossz, terület, térfogat, stb.) → geometriai valószínűség
- A valószínűséget A és Ω mértékének hányadosával adjuk meg: P(A) = m(A)/m(Ω)
- A valószínűséget Ω halmazon egyenletes eloszlásnak nevezzük, ha tetszőleges A esemény valószínűsége arányos az általa jelölt halmaz mértékével

Találkozási probléma: Ketten megbeszélik, hogy délután 5 és 6 között egy megadott helyen találkoznak. Aki korábban érkezik az 20 percet vár a másikra, majd elmegy. Mennyi a valószínűsége a találkozásnak, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek?



$|x-y| < 1/3$ → A satírozott rész területe 5/9 → ez a valószínűség értéke

Monte Carlo módszer a Riemann integrál közelítő értékének meghatározására:

- Legyen f(x) a (0,1) intervallumon értelmezett fv, aminek az értéke is 0 és 1 között van ebben a tartományban. Az $\int_0^1 f(x)dx$ közelítő értékét így is meghatározhatjuk:
  - Két a (0,1) intervallumon egyenletes eloszlásból származó mintaelemet választunk. Ezek egy pont koordinátái lesznek.
  - x_1 és y_1 az elsőként választott koordináták
  - Ha $y_1 < f(x_1)$ akkor ez az (x_1,y_1) pont a fv görbéje alatti tartományba esik
  - Ismételjük meg az eljárást N-szer
  - Ha ezek közül L alkalommal került a görbe alatti tartományba a választott véletlen pont, akkor L|N relatív gyakoriságával jól közelíti meg a fenti integrál értékét, ha N kellően nagy

A Monte Carlo elv: Szemléletesen azt jelenti, hogy a bonyolult kifejezések kiértékelésénél adott esetben időigényes és pontatlan numerikus közelítések helyett egy olyan egyszerű, valószínűségi változót keresünk, melynek várható értéke éppen a keresett kifejezés.

8.

A Monte Carló módszer (a szimuláció) alapgondolata

Feladat: Számítsuk ki az $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integrált.

Nehézség: Az integrandusznak van ugyan primitív függvénye, de nem adható meg elemi függvények segítségével, következésképpen a Newton-Leibniz képletet nem tudjuk segítségül hívni.

Szimuláció: Konstruáljuk meg a következő kísérletet: „kérjünk" egy véletlenszám generátortól két 0 és 1 közé eső véletlen számot, először egy x, azután egy y értéket. A véletlenszám generátor egyenletesen adogatja ezeket a számokat. A kísérlet *eredménye* egy (x,y) szám pár, ahol $0 \le x \le 1$, és $0 \le y \le 1$. A kísérletnek annyi lehetséges ***kimenetele*** van, ahány ilyen számpár létezik. Ezeket a számpárokat felfoghatjuk, mint egy egységnégyzet pontjai. Ez az egységnégyzet *reprezentálja* a fent leirt, mesterségesen előidézett (szimulált) véletlen tömegjelenség ***eseményterét***.

Jelentse A azt az eseményt, amely akkor következik be, ha $y \le e^{-x^2}$. A tekintett szimulált véletlen tömegjelenséget olyan geometriai modellel írhatjuk le, ahol a $P(A) = \lambda t(A)$ arányossági feltételt elfogadhatjuk „valóságosnak". Ebből adódik a „szokásos" képlet:

$$P(A) = \frac{t(A)}{t(\Omega)},$$

ahol t a területet jelenti, Ω pedig az eseményteret. Mivel ebben a modellben $t(\Omega) = 1$, ezért itt és most $P(A) = t(A)$. De a t(A) nem más, mint a szóban forgó integrál!

$$t(A) = \int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

De az elmondottak szerint az is igaz, hogy $\int_0^1 e^{-x^2}dx = P(A)$.

Ez az összefüggés az alapja a következő számítógépes technikának: a mesterségesen megkonstruált véletlen tömegjelenség nagyon sok alkalommal való megismétlése segítségével relatív gyakoriságot számolunk, pontosabban az A esemény bekövetkezésének relatív gyakoriságát, melyet jelöljünk a „szokásos" módon k/n-nel. A nagy számok Bernoulli féle törvényéből tudjuk (lásd később), hogy nagy n esetén ezek a relatív gyakoriság értékek nagyon jól közelítik a valószínűséget, azaz

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = P(A) \approx \frac{k}{n}.$$

A szóban forgó integrál „meglehetősen pontos" közelítő értékét meghatározhatjuk tehát egy mesterségesen konstruált véletlen tömegjelenség sokszori megismétlése révén.