A matematikában a **Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség** (illetve angol nyelvterületen *Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség*, az orosz matematikai irodalomban pedig *Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség*) Augustin Louis Cauchyról, Hermann Amandus Schwarzról és Viktor Jakovlevics Bunyakovszkijról elnevezett egyenlőtlenség, mely gyakran használatos a skalárszorzatos terek elméletében, a végtelen sorok és szorzatok integrálásának elméletében és a valószínűség-számításban.

Legáltalánosabb formában a (valós vagy komplex számtest feletti) *V* skalárszorzatos vektortér tetszőleges *x* és *y* elemének <x,y> skaláris szorzata abszolútértékének felső becslésére szolgál:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle.$$

Megjegyzendő, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha *x* és *y* lineárisan összefüggő.

Tartalomjegyzék

[szerkesztés] Az absztrakt tétel bizonyítása

Skalárszorzatos terekben az alábbi kitüntetett norma vezethető be:

$$||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Ezt a jelölést használni is fogjuk. Minthogy az egyenlőtlenség az *y=0* esetben fennáll, feltehetjük, hogy <*y*, *y*> nem nulla. Legyen λ tetszőleges valós (vagy komplex) szám. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x-\lambda y\|^2 = \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \lambda\langle x,y\rangle - \overline{\lambda}\langle y,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle. \end{aligned}$$

(a „λ felülvonás” a komplex esetben használandó). Mivel ez minden λ-ra teljesül, ezért a

$$\lambda = \langle y,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle^{-1}$$

speciális esetben is igaz, ahonnan kapjuk, hogy

$$0 \leq \langle x,x\rangle - |\langle x,y\rangle|^2 \cdot \langle y,y\rangle^{-1}$$

amely akkor és csak akkor teljesül, ha

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

vagy másként:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

QED

[szerkesztés] Az egyenlőtlenség speciális alakjai

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, attól függően, hogy a *V* skalárszorzatos tér mi, speciális alakot ölthet.

[szerkesztés] A valós szám n-esek tere

Az $\mathbf{R}^n$ euklideszi vektortér esetén (ezt az algebrai megközelítés miatt *diszkrét* esetnek is nevezhetjük) az állítás a következőképpen néz ki.

Tétel. Legyen $a_1, \ldots, a_n$és $b_1, \ldots, b_n$valós számok véges sorozatai. Ekkor

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

(és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha valamelyik sorozat „többszöröse” a másiknak, azaz például $b_1 = ca_1, \ldots, b_n = ca_n$ valamilyen *c* valós számra).

Első bizonyítás. Ha tehát $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ valós számok, akkor minden valós *x*-re

$$(a_i x - b_i)^2 = a_i^2 x^2 - 2a_i b_i x + b_i^2 \geq 0$$

teljesül. Ezeket az egyenlőtlenségeket $i = 1, \ldots, n$-re összeadva azt kapjuk, hogy minden valós *x*-re igaz lesz

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + \cdots a_n b_n)x + (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq 0.$$

Ez csak úgy lehet, ha a szereplő másodfokú polinom diszkriminánsa nempozitív, azaz

$$4(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 - 4(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0$$

amiből átrendezéssel adódik az egyenlőtlenség.

Az egyenlőség esete triviális, hiszen ekkor *c*-t kiemelve, mindkét oldalon az a_i számok négyzetösszegét kapjuk. QED

Második bizonyítás. Felhasználva a (kiszorzással látható)

$$(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) - (\sum a_i b_i)^2 = \sum_{i<j}(a_i b_j - a_j b_i)^2$$

azonosságot, az egyenlőtlenség azonnal adódik.

Megjegyzés. Természetesen ezesetben nem kell feltétlenül az $\mathbf{R}^n$-beli skalárszorzásként felfognunk az egyenlőtlenség bal oldalát. Tekinthetünk az egyenlőtlenségre úgy is, mint tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ illetve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valós számokra vonatkozó relációra.

[szerkesztés] A négyzetesen integrálható valós függvények terében

A négyzetesen integrálható valós-valós függvények terének (L^2) esetén az analízis egy fontos egyenlőtlenségét kapjuk (nevezhetjük így ezt az egyenlőtlenség *folytonos!* alakjának). Szemléletesség kedvéért megjegyezzük, hogy ebben az alakban az összeadás helyett integrálás áll, mely valóban azt sugallja, hogy analízisban alkalmazott variáns úgy keletkezik az előző, diszkrét esetből, hogy a véges összeadást, annak végtelen határátmenetével, az integrállal helyettesítjük.

Tétel. Ha *f* és *g* folytonos valós függvények az [*a*,*b*] intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

(és egyenlőség csak akkor áll, ha valamelyik függvény többszöröse a másiknak: van olyan *c* szám, hogy $g(x) = cf(x)$ minden $a \leq x \leq b$-re, vagy fordítva).

[szerkesztés] A háromdimenziós euklideszi tér

Amennyiben *x* és *y* a háromdimenziós koordinátatér vektorait jelöli, akkor a fenti második bizonyítás a következő egyenlőséget adja:

Tétel. Ha *x* és *y* az $\mathbf{R}^3$ két vektora, akkor

$$|x|^2|y|^2 = |x \cdot y|^2 + |x \times y|^2$$

egyenlőség teljesül, ahol $x \cdot y$ a két vektor skaláris szorzata, $x \times y$ pedig a két vektor vektoriális szorzata.

Bizonyítás. A skaláris és vektoriális szorzás geometriai jellemzéséből adódik, hogy ha α az x és y vektor hajlásszöge, akkor az $|x|^2|y|^2$ szorzat így írható:

$$|x|^2|y|^2 = |x|^2|y|^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = |x|^2|y|^2\cos^2\alpha + |x|^2|y|^2\sin^2\alpha$$

ahol az utolsó egyenlőség után az első tag a skaláris szorzat, a második tag a vektoriális szorzat nagyságának négyzete. Itt tehát felhasználtuk, hogy

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

(mely lényegében a Pithagorasz-tétel). QED

Megjegyzés. Ebben az esetben jól látható, hogy az egyenlőtlenség lényegében ekvivalens az elemi geometria azon tényével, hogy derékszögű háromszögben „az átfogó hosszabb, mint bármelyik befogó”. A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség tehát a skalárszorzatos terek egy alapvető jelentőségű összefüggésére mutat rá. Sőt, magának az egyenlőtlenségnek a következménye, hogy ezekben a terekben bevezethető a vektorok hajlásszögének fogalma.

[szerkesztés] Általánosítása

Az egyenlőtlenség általános formája a Hölder-egyenlőtlenség: ha $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ nemnegatív valós számok, $p,q > 1$, továbbá $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ teljesül, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}.$$

[szerkesztés] Története

A sorozatokra vonatkozó variációt Cauchy 1821-ben publikálta *Cours d'Analyse Algébrique* című könyvében. Az integrálos verziót Bunyakovszkij 1859-ben a Szentpétervári Tudományos Akadémia Közleményeiben publikálta, hivatkozva egykori tanára, Cauchy egyenlőtlenségére, azt jólismertnek nevezve, abból vezetve le. A Göttingában dolgozó Schwarz 1885-ben újra bebizonyította az integrálos formát.