10

13. Valószínűségi változók függetlensége, a függetlenség különböző jellemzése. Valószínűségi változók korrelálatlansága. Függetlenség és korrelálatlanság kapcsolata. A lineáris kapcsolat tesztelése.

Valószínűségi változók függetlensége:

Valószínűségi változók függetlensége

Definíció: A ξ és η valószínűségi változókat egymástól függetleneknek nevezzük, ha együttes eloszlásfüggvényük egyenlő a perem-eloszlásfüggvények szorzatával. Képletben:

$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ $((x,y) \in R^2)$

Tétel: Ha ξ és η függetlenek, akkor tetszés szerinti $a<b$; $c<d$ számpárok esetén: $P(a \leq \xi < b;\ c \leq \eta < d) = P(a \leq \xi < b) \cdot P(c \leq \eta < d)$

Bizonyítás:

$$P(a \leqq \xi < b;\ c \leqq \eta < d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) =$$
$$= F(b)F(d) - F(a)F(d) - F(b)F(c) + F(a)F(c) =$$
$$= [F(b) - F(a)]\,[F(d) - F(c)] = P(a \leqq \xi < b)P(c \leqq \eta < d).$$

Tétel: A ξ és η diszkrét valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha minden lehetséges (x_i, y_j) értékpárra

$P(\xi = x_i;\ \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$

Vagy a szokásos jelölésekkel: $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ $(i=1\ldots n;\ j=1\ldots m)$

Következmény:

Ha ξ lehetséges értékei $x_1, \ldots, x_m$ és η lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots, y_n$, akkor ξ és η függetlensége esetén

$$P(\xi = x_i;\ \eta = y_j) = P(\xi = x_i)\,P(\eta = y_j) \tag{6.8}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Most tegyük fel, hogy a (6.8) egyenlőség igaz, akkor

$$F(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P(\xi = x_i;\ \eta = y_j) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) =$$
$$= \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i) \sum_{y_j < y} P(\eta = y_j) = F_1(x)F_2(y).$$

Ezzel beláttuk a következő állítás helyességét.

Tétel: A x és h folytonos valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha a sűrűségfüggvényekre is fennáll az ún. szorzási szabály: $f(x,y) = f_1(x) \times f_2(y)$ $((x,y) \in R^2)$

(10.)

Bizonyítás:
Ha ξ és η függetlenek, akkor

$$f(x, y) = F''_{xy} = (F_1(x)F_2(y))''_{xy} = F'_1(x)F'_2(y) = f_1(x)f_2(y).$$

Fordítva, ha (6.10) fennáll, akkor

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, du\, dv = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_1(u)f_2(v)\, du\, dv =$$
$$= \int_{-\infty}^{y} f_2(v) \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\, du\, dv = F_2(y)F_1(x).$$

Tétel: Ha ξ és η függetlenek, akkor M (ξη) = M (ξ) · M (η) (amennyiben ezek a várható értékek léteznek) Következménye: Ha ξ és η függetlenek, akkor cov (ξ,η) = R (ξ,η) = 0.

Bizonyítás:
a) Legyenek ξ és η diszkrét valószínűségi változók. A (6.9) miatt

$$M(\xi\eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i p_i y_j q_j = \sum_i x_i p_i \sum_j y_j q_j = M(\xi)M(\eta).$$

b) Folytonos esetben, felhasználva a (6.10) formulát

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\, dy\, dx = M(\xi)M(\eta).$$

1. Következmény: Ha ξ és η függetlenek, akkor

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = R(\xi, \eta) = 0.$$

Tehát a függetlenségből következik a korrelálatlanság.

Tétel: Ha ξ és η függetlenek, akkor négyzeteik, ξ^2 és η^2 is függetlenek.

Kovariancia és korrelációs együttható értelmezése, korrelálatlanság és függetlenség kapcsolata

Kovariancia és korrelációs együttható

Definíció: Ha létezik a ξ és az η valószínűségi változók várható értéke, továbbá létezik M ([ξ–M(ξ)]*[η–M(η)]) várható érték, akkor ezt a ξ és az η kovarianciájának nevezzük: cov(ξ, η)=M ([ξ–M(ξ)]*[η–M(η)])=M(ξη)–M(ξ)M(η). Definíció: Ha a ξ és η valószínűségi változóknak létezik a szórásuk, akkor az R(ξ, η)= cov (ξ, η) / D(ξ)D(η) számot a ξ és az η korrelációs együtthatójának nevezzük.
Ha η=aξ, azaz a kapcsolat függvényszerű: M (η) = a·M (ξ); M (ξη) = a·M (ξ^2) és D (η) = |a|· D(ξ), R(ξ, η) = 1, ha a>0; -1, ha a<0.
Definíció: Ha ξ és η korrelációs együtthatója létezik és R (ξ,η) = 0 akkor azt mondjuk, hogy a ξ és az η valószínűségi változók korrelálatlanok.

(10.)

Tétel: Ha ξ és η szórása létezik, akkor létezik $\xi+\eta$ szórása is és $D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} D^2(\xi+\eta) &= M([\xi+\eta]^2) - M^2(\xi+\eta) = \\ &= M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - [M(\xi) + M(\eta)]^2 = \\ &= M(\xi^2) + 2M(\xi\eta) + M(\eta^2) - M^2(\xi) - 2M(\xi)M(\eta) - M^2(\eta) = \\ &= M(\xi^2) - M^2(\xi) + M(\eta^2) - M^2(\eta) + 2[M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)] = \\ &= D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta). \end{aligned}$$

Következménye: Ha ξ és η korrelálatlanok és létezik a szórásuk, akkor $D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta)$.