A) Valószínűségek becslése a Csebisev-egyenlőtlenséggel

A1. Feladat. Az X valószínűségi változó várható értéke 10, varianciája 64.

a) Legfeljebb mekkora valószínűséggel tér el X a várható értékétől legalább 12 egységgel?

b) Mekkora ennek a valószínűségnek a pontos értéke, ha X egyenletes eloszlású?

Válasz:

a) $P(|X-10|\geq 12) \leq \dfrac{64}{144}=\dfrac{4}{9}=\mathbf{0.444}$ b) $P(|X-10|\geq 12)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}=\mathbf{0.134.}$

Megoldás:

a): A Csebisev egyenlőtlenség segítségével tudunk felső becslést adni a kérdéses valószínűségre. A Csebisev egyenlőtlenség egyik lehetséges formája a következő:

$$P(|X-E(X)|\geq \varepsilon)\leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Ebbe behelyettesítve az adatokat kapjuk a választ.

b): Ha ismert az X F(x) eloszlásfüggvénye, akkor pontos értéket is tudunk adni. Vegyük észre, hogy

$$P(|X-10|\geq 12)=1-P(|X-10|<12)=1-P(-2<X<22)=1-(F(22)-F(-2))$$

A feltétel szerint X egyenletes eloszlású. Tudnunk kellene, melyik intervallumon. Jelölje [a, b] azt az intervallumot, amelyen X egyenletes eloszlású. Mivel az egyenletes eloszlásról tudjuk, hogy

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \quad \text{és} \quad D^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12},$$

az ismeretlen a és b paraméterek értékét az $a + b = 20$ és a $(b-a)^2 = 12\cdot 64 = 3\cdot 16^2$ egyenletrendszerből határozhatjuk meg: $a = 10 - 8\sqrt{3}$ és $b = 10 + 8\sqrt{3}$.

Mivel $10-8\sqrt{3}<-2<22<10+8\sqrt{3}$, ezért

$$F(22)=\frac{22-(10-8\sqrt{3})}{16\sqrt{3}}=\frac{12+8\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad F(-2)=\frac{-2-(10-8\sqrt{3})}{16\sqrt{3}}=\frac{-12+8\sqrt{3}}{16\sqrt{3}}.$$

A válasz tehát a következő:

$$P(|X-10|\geq 12)=1-F(22)+F(-2))=\frac{16\sqrt{3}-12-8\sqrt{3}-12+8\sqrt{3}}{16\sqrt{3}}=\frac{16\sqrt{3}-24}{16\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A2. Feladat. Az X valószínűségi változó várható értéke 750, szórása 25.

a) Legfeljebb mekkora valószínűséggel tér el X a várható értékétől legalább 45 egységgel?

b) Mekkora ennek a valószínűségnek a pontos értéke, ha X normális eloszlású?

Megoldás:

a) $P(|X-750| \geq 45) \leq \frac{25^2}{45^2} = \frac{25}{81} = \mathbf{0.309}$ b) $P(|X-750| \geq 45) = 2(1-\Phi(1{,}8)) = \mathbf{0.072}$.

Megjegyzés: $\Phi(1.8) = 0.9641$

A3. Feladat. Az X valószínűségi változó várható értéke 5, varianciája 25.

a) Legalább mekkora valószínűséggel tér el X a várható értékétől 7.5 egységnél kisebb mértékben?

b) Mekkora ennek a valószínűségnek a pontos értéke, ha X exponenciális eloszlású?

Megoldás:

a) $P(|X-5| < 7.5) \geq 1 - \frac{25}{7{,}5^2} = \frac{5}{9} = \mathbf{0.555}$ b) $P(|X-5| < 7.5) = 1 - e^{-2{,}5} = \mathbf{0.918}$.

Megjegyzés: Mivel b) esetén $E(X) = D(X) = \frac{1}{\lambda}$, ezért $\lambda = 0.2$.

A4. Feladat. Az X valószínűségi változó várható értéke 25, szórása 5.

a) Legfeljebb mekkora valószínűséggel tér el X a várható értékétől legalább 10 egységgel?

b) Mekkora ennek a valószínűségnek a pontos értéke, ha X egyenletes eloszlású?

Megoldás:

a) $P(|X-25| \geq 10) \leq$ **0,25** b) $P(|X-25| \geq 10) = \mathbf{1}$.

A5. Feladat. Az X valószínűségi változó várható értéke 150, szórása 4.

a) Legalább mekkora valószínűséggel tér el X a várható értékétől legfeljebb 6 egységgel?

b) Mekkora ennek a valószínűségnek a pontos értéke, ha X normális eloszlású?

Megoldás:

a) $P(|X-150| \leq 6) \geq \frac{5}{9}$, b) $P(|X-150| \leq 6) = 2\Phi(1.5) - 1$.

B) A nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakja

B1. Feladat. Egy ismeretlen valószínűségű esemény valószínűségét szeretnénk meghatározni. Hány megfigyelést kell végeznünk ahhoz, hogy legalább 0.94 valószínűsége legyen annak, hogy a megfigyelésekből adódó relatív gyakoriság a keresett valószínűségtől legfeljebb 0.25-dal térjen el?

Megoldás: Ismert összefüggés szerint

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<0.25\right)\geq 1-\frac{1}{4n(0.25)^2}.$$

Teljesül a kívánt feltétel, ha $1-\frac{1}{4n(0.25)^2}\geq 0.94$. Ez akkor és csak akkor teljesül. ha

$$n \geq N = 200/3 = 66.6667.$$

B2. Feladat. Monte Carlo módszerrel kívánjuk az $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integrál pontos értékét $\varepsilon = 0.0001$ hibahatáron belül közelíteni. Legalább hány iterációt kell végrehajtanunk, ha azt akarjuk, hogy a kapott közelítő érték 0.99 valószínűséggel eleget tesz az előírt hibahatárnak.

Megoldás: a vizsgán.

B3. Feladat. A választások napján egy közvéleménykutató-intézet $\varepsilon = 0{,}05$ hibahatáron belül 0,95 megbízhatósággal előre akarja jelezni a pártokra leadott szavazatok végeredményét. Legalább hány ember szavazatát kell ehhez biztosan tudniuk?

Megoldás: Ismert összefüggés szerint

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<0.05\right)\geq 1-\frac{1}{4n(0.05)^2}.$$

Teljesül a kívánt feltétel, ha $1-\frac{1}{4n(0.05)^2}\geq 0.95$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$n \geq N = 2000.$$

B4. Feladat. Valamelyik társadalmi rétegben szeretnénk meghatározni az erős dohányosok arányát. Hány megfigyelést kell végeznünk ahhoz, hogy legalább 0.9 valószínűsége legyen annak, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól legfeljebb 0.04-dal tér el?

Megoldás: Ismert összefüggés szerint

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<0.04\right)\geq 1-\frac{1}{4n(0.04)^2}.$$

Teljesül a kívánt feltétel, ha $1-\frac{1}{4n(0.04)^2}\geq 0.9$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$n \geq N = 1526.5.$$

C) Központi határeloszlás tétel

C1. Feladat. Egy gyorsbüfé átlagos napi szükséglete papírzacskóból 1000 darab, ahol az ingadozás mértéke szórásban megadva 49 zacskó. Hány zacskót kell 2010. június hónapra rendelni, ha azt akarja a gyorsétterem menedzsmentje, hogy a hónap folyamán 0.99 valószínűséggel ne fogyjon ki a készlet.

Megoldás: Jelölje X_i az i-edik napi felhasználást. Az X_i, i = 1,2, ..., 30 valószínűségi változók páronként függetlenek és azonos eloszlásúak, következésképpen $E(X_i) = 1000$ és $D(X_i) = 49$ minden i-re. Legyen X a június havi felhasználás. Ekkor $X = X_1 + X_2 + ... + X_{30}$. Az elméletből ismert, hogy

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_{30}) = 30x1000 = 30000$$

és

$$var(X) = var(X_1) + var(X_2) + ... + var(X_{30}) = 30x49^2.$$

A központi határeloszlás-tételből tudjuk, hogy X eloszlása normálisnak tekinthető. A fenti adatok birtokában tehát X $N(30000, 49\sqrt{30})$ eloszlású valószínűségi változó. Jelölje *n* a feltételnek eleget tevő zacskószámot. Ekkor *n* értékét a következő egyenlet megoldása szolgáltatja:

$$P(X<n)=F(n)=\Phi\left(\frac{n-30000}{49\sqrt{30}}\right)\geq 0.99.$$

Függvénytáblázatból:

$$2.327 \quad \leq \frac{n-30000}{49\sqrt{30}}, \qquad \text{azaz} \qquad n\geq 30000+2.327\cdot 49\sqrt{30}=30624.5297.$$

C2. Feladat. Egy felkapott cukrászda átlagos napi szükséglete papírdobozból 250 darab, ahol az ingadozás mértéke szórásban megadva 16 doboz. Hány dobozt kell 2010. június hónapra rendelni, ha azt akarja a cukrászda menedzsmentje, hogy a hónap folyamán 0.99 valószínűséggel ne fogyjon ki a készlet.

Megoldás: Jelölje X a június hónapban felhasznált papírdoboz mennyiséget. A központi határeloszlás-tételből tudjuk, hogy X eloszlása normálisnak tekinthető. A fenti adatok birtokában tehát X $N(7500, 16\sqrt{30})$ eloszlású valószínűségi változó. Jelölje n a feltételnek eleget tevő zacskószámot. Ekkor n értékét a következő egyenlet megoldása szolgáltatja:

$$P(X < n) = F(n) = \Phi\left(\frac{n - 7500}{16\sqrt{30}}\right) \geq 0.99 .$$

Függvénytáblázatból: $2.327 \quad \leq \dfrac{n - 7500}{16\sqrt{30}}$, azaz

$$n \geq 7500 + 2.327 \cdot 16\sqrt{30} = 7703.9281.$$

C3. Feladat. Egy gyorsbüfé átlagos napi szükséglete papírtányérból 450 darab, ahol az ingadozás mértéke szórásban megadva 64 papírtányér. Hány papírtányért kell 2010. június hónapra rendelni, ha azt akarja a gyorsbüfé menedzsmentje, hogy a hónap folyamán 0.98 valószínűséggel ne fogyjon ki a készlet.

Megoldás:

$$P(X < n) = F(n) = \Phi\left(\frac{n - 13500}{64\sqrt{30}}\right) \geq 0.98 .$$

Függvénytáblázatból: $2.042 \leq \dfrac{n - 13500}{64\sqrt{30}}$, azaz

$$n \geq 13500 + 2.042 \cdot 64\sqrt{30} = 14215.8077$$