A Poisson eloszlás

Üvegpalackok előállításánál lép fel a következő probléma: a megolvasztott üvegben, amelyből a palackok készülnek, kis szilárd részecskék maradnak, melyeket röviden „köveknek" nevezünk. Ha egy palack anyagába ilyen kő jut, akkor a palack használhatatlan lesz.

A kövek a folyékony üvegben szabálytalanul helyezkednek el, azonban az adott gyártási körülmények mellett adott mennyiségű üvegre átlagban ugyanannyi kő jut.

Tegyük fel például, hogy 100kg folyékony üvegben átlagosan x darab kő van, továbbá legyen 1 palack súlya 1 kg.

Kérdés: az előállított palackok hány százaléka lesz használhatatlan attól, hogy követ tartalmaz?

1. válasz: x %.

   Ez csak akkor lenne helyes, ha egy üvegbe legfeljebb csak 1 kő kerülhetne.

2. válasz:

   feltételezzük, hogy bármelyik kő egyforma valószínűséggel kerülhet bármelyik üveg anyagába, és hogy az egyes kövek elhelyezkedései egymástól függetlenek. A problémát tehát a következő urnaproblémára vezetjük vissza: n darab golyót kell N számú urnába véletlenszerűen elhelyezni és azt kérdezzük, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott urna pontosan k golyót tartalmaz?

   A tekintett probléma úgy is felfogható, hogy véletlenszerűen választunk urnákat az elhelyezendő golyók számára.

   Rögzítsünk egy urnát az N urna közül. Ennek az urnának a kiválasztása 1/N valószínűségű. Annak valószínűsége, hogy nem ezt az urnát választom: 1 – 1/N. A kiszemelt urnát pontosan k-szor választani

$$\frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}$$

   valószínűséggel lehet. A kiválasztott urnába az n golyó közül k darabot kell beletenni. Ezt $\binom{n}{k}$- féleképpen lehet. A keresett valószínűség tehát

$$W_k=\binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

A selejt valószínűsége tehát:

$$P_n(S) = 1 - W_0 = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

Ki akarjuk számítani a selejtszázalékot abban az esetben, ha N palack előállításához M mázsa folyékony üveget használunk fel. Ebben az esetben N = 100M és n = xM. Legyen

$$\lambda = \frac{x}{100} = \frac{n}{N}.$$

Mivel n = λN, ezért:

$$W_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

Ha $M \to \infty$, akkor $n \to \infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty} W_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Ekkor P(S) = 1 - $\lim\limits_{n\to\infty} W_0 = 1 - e^{-\lambda}$.

Ha x = 30, akkor P(S) = 0,2592. Ha kisebb palackokat készítünk, mondjuk 0.25 kg-osakat, akkor P(S) = 0,0722. Ez a példa mutatja, hogy konkrét termelési kérdésekre nézve hasznos útmutatást kaphatunk a valószínűségszámítás segítségével.

A Poisson eloszlás, mint a ritka események törvényszerűsége

Adott k-ra a $W_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ valószínűség akkor közelíthető jól a $P_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ valószínűséggel, ha n elegendően nagy és λ = np, következésképpen p meglehetősen kicsi.

Feladatok.

1. Egy ruhaszövet anyagában 100 méterenként átlag 4 hiba van. Egy 600 méteres darabot 3 méteres darabokra vágnak. Előreláthatóan hány hibátlan darab lesz ezek között?

Megoldás: $\lambda = 3\frac{4}{100} = \frac{12}{100}$ hiba esik átlagosan egy 3 méteres darabra. Annak valószínűsége, hogy egy 3 méteres darab hibátlan: $P(\text{Hibátlan}) = e^{-0.12}$.

2. Egy bank ügyfélforgalmát vizsgálva azt találták, hogy egy óra alatt átlagosan 100 ügyfél keresi fel a bankot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy negyedórás

időintervallumban 30-nál több ügyfél keresi fel a bankot? Mekkora az ügyfelek számának szórása ebben az időintervallumban?

Megoldás: egy negyedórás időintervallumban átlagosan λ = 25 ügyfél keresi fel a bankot.

A keresett valószínűség: $P(X > 30) = 1 - e^{-25}\sum_{k=0}^{30}\frac{25^k}{k!}$.

3. A cukrászüzemben 1kg mazsolás kalácsba átlagosan 50 szem mazsolát tesznek. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 10 dkg-os szeletben
   a. 5-nél több
   b. 3-nál kevesebb

   mazsola szemet találunk. Indokolja, miért alkalmazható Poisson-eloszlás a mazsola szemek valószínűség-eloszlásának vizsgálatára.

Megoldás: egy 10 dkg-os szeletbe átlagosan λ = 5 szem mazsola jut.

$$a)\ P(X > 5) = 1 - e^{-5}\sum_{k=0}^{5}\frac{5^k}{k!},\quad b)\ P(X < 3) = e^{-5}\sum_{k=0}^{2}\frac{5^k}{k!}.$$