3. Egyszerűbb valószínűségszámítási tételek. A valószínűségelmélet és a mértékelmélet kapcsolata. A Poincaré-formula. A Montmort-féle feladat.

Egyszerűbb valószínűség számítási tételek:

I. A lehetetlen esemény valószínűsége 0
Biz: Bármely A eseményre igaz hogy A*0=0 és A+0=A, tehát P(A)=P(A+0)=P(A)+P(0) -> P(0) = 0
II. Bármely az esemény esetén komplementerének valószínűsége 1-P(A)
Biz.: 1 = P(I) = P(A+A komplementer)=P(A)+P(A komplementer) ->1 = P(A)+P(A komplementer) -> P(A komplementer) = 1-P(A)
III. Ha A esemény maga után vonja B-t, akkor:
a. P(A) <= P(B)
b. P(B-A) = P(B) – P(A)
Biz: A és (B-A) egymást kizáró események, így összegük B -> P(B) = P(A) + P(B-A)
IV. Tetszőleges A és B eseményre érvényes: P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A*B)

A valószínűségelmélet és a mértékelmélet kapcsolata:
A valószínűségi mező nem más, mint egy olyan mértéktér, ahol az egész tér mértéke 1.
mértékelmélet ↔ valószínűségszámítás
mértéktér ↔ valószínűségi mező
mérhető halmaz ↔ esemény
mérték ↔ valószínűség mérhető
függvény ↔ valószínűségi változó
integrál ↔ várható érték

Poincaré formula: A tétel azt mondja ki, hogy lehet egymást ki nem záró események összegének valószínűségét kiszámítani logika szita segítségével.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} * S_i^n \ ahol\ S_i^n = \sum_{1 \le j1 < \cdots < ji \le n} P(A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{ji})$$

3.

A Montmort-féle feladat: Elhelyezünk egy urnában n darab 1-től n-ig számozott egyforma golyót, majd ezeket egymás után véletlenszerűen kihúzzuk. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik golyó sem egyezik meg a kihúzásának a sorszámával?

Ugyanez más megfogalmazásban: egy táncversenyre n pár nevezett be. A táncrendet a zsűri véletlenszerűen határozza meg; a férfiak vakon, „sorshúzással" választanak partnert. Mi a valószínűsége, hogy senki sem került össze a párjával ?

Megoldás: a keresett esemény komplementerének a valószínűségét lehet a Poincaré-tétel segítségével meghatározni.

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye az i sorszámú golyó. Ha A jelöli azt az eseményt, hogy egyik golyó sem annyiadikra jött ki, amennyi a száma, akkor

$$A = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n \text{ és } \overline{A} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n .$$

P(A) kiszámítását a $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ formula segítségével fogunk eljutni, ahol a

$P(\overline{A}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűséget a Poincaré-formula segítségével könnyen ki lehet számítani.

Egy elemi esemény itt az n golyó egy sorrendje. Az összes sorrend száma n!. Ezek közül azok száma, amelyeknél az i számot viselő golyó az i-edik pozícióban van: (n-1)!, és így

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},\ i = 1,2,\ldots,n \quad \text{és így} \quad S_1^{(n)} = n \cdot \frac{1}{n} = 1 .$$

Annak valószínűsége, hogy az i jelű golyó az i-edik, a j jelű pedig a j-edik pozícióban van

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},\ i \neq j.$$

Mivel a különböző (i, j) párok száma $\binom{n}{2}$, ezért $S_2^{(n)} = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}$.

Folytatva az eljárást $S_k^{(n)} = \frac{1}{k!}$, k = 1,2, …, n és így

$$P(\overline{A}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} .$$

A keresett valószínűség tehát:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} .$$