# Diszkrét valószínűségi változók

**1. Feladat:** Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Jelölje X a dobott számok szorzatát. Számítsa ki az X valószínűségi változó várható értékét.

**Válasz:** $E(X) = \frac{441}{36} = \mathbf{12.25}$

**Megoldás:** Jelölje u az első dobás, v pedig a második dobás eredményét. A lehetséges kimeneteleket ezek az (u, v) párok reprezentálják, melyekből pontosan 36 van. A várható érték a valószínűségi változó lehetséges értékeinek súlyozott átlaga, ahol a súlyok a megfelelő valószínűségek.

A lehetséges értékek megjelenítésére szolgál a következő táblázat: a táblázat belsejében találhatók a lehetséges értékek:

| u \ v | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | **12** |
| 3 | 3 | 6 | 9 | **12** | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | **12** | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | **12** | 18 | 24 | 30 | 36 |

A lehetséges értékek között vannak megegyezők is. A 12-es érték például négyszer fordul elő. Mivel bármelyik (u, v) pár 1/36 valószínűséggel adódhat, ezért annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata 12 lesz 4/36-tal egyenlő. A várható értékben tehát a 12-t 4/36-os súllyal kell figyelembe venni.

A várható értéket úgy is megkapjuk, ha a táblázatban előforduló valamennyi számnak vesszük az egyszerű számtani átlagát. Ebben a számtani átlagban a 12-es érték például a súlyának megfelelően 4-szer fog szerepelni. A kapott számtani átlag a következő:

$$E(X) = \frac{441}{36} = \mathbf{12.25}$$

**2. Feladat:** Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Jelölje X a dobott számok ***minimumát***. Számítsa ki az X valószínűségi változó várható értékét.

**Válasz:** $E(X) = \frac{91}{36} = \mathbf{2{,}5278}$

**Megoldás:** Jelölje u az első dobás, v pedig a második dobás eredményét. A lehetséges kimeneteleket ezek az (u, v) párok reprezentálják, melyekből pontosan 36 van. A várható érték a valószínűségi változó lehetséges értékeinek súlyozott átlaga, ahol a súlyok a megfelelő valószínűségek.

A lehetséges értékek megjelenítésére szolgál a következő táblázat: a táblázat belsejében találhatók a lehetséges értékek:

| u \ v | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

A várható értéket úgy is megkapjuk, ha a táblázatban előforduló valamennyi számnak vesszük az egyszerű számtani átlagát. A kapott számtani átlag a következő:

$$E(X) = \frac{91}{36} = \mathbf{2{,}5278}$$

**3. Feladat:** Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Jelölje X a dobott számok ***maximumát***. Számítsa ki az X valószínűségi változó várhatóértékét.

**4. Feladat.** Legyenek A és B tetszőleges események H-ban. Jelölje X az A esemény, Y pedig a B esemény karakterisztikus függvényét. Legyenek

$$P(A) = 0.5, \qquad P(B \mid A) = 0.6, \qquad P(A \cup B) = 0.8.$$

(a) Határozza meg az (X, Y) együttes valószínűség eloszlását.
(b) Számítsa ki az $E(3X^2 + 4Y^2 - 12XY)$ várható értéket!

**Válasz:**

| X \ Y | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.3 | 0.5 |
| 1 | 0.2 | 0.3 | P(A) = 0.5 |
| | 0.4 | P(B) = 0.6 | |

$E(3X^2 + 4Y^2 - 12XY) = 0.3$

**Megoldás:** A válasz megadásához szükségünk van az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásának ismeretére. Ez a következő adatok meghatározását jelenti

| X \ Y | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| 0 | $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $P(\overline{A} \cap B)$ | $P(\overline{A})$ |
| 1 | $P(A \cap \overline{B})$ | $P(A \cap B)$ | $P(A)$ |
| | $P(\overline{B})$ | $P(B)$ | 1 |

A $P(B \mid A) = 0.6$ feltételes valószínűségből, a $P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A)$ szorzási szabály szerint kapjuk, hogy $P(B \cap A) = 0.3$. A $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$ összefüggésből kiszámítható P(B)! P(B) = 0.6. Írjuk be ezeket az adatokat a táblázatunkba:

| X \ Y | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| 0 | $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $P(\overline{A} \cap B)$ | $P(\overline{A})$ |
| 1 | $P(A \cap \overline{B})$ | 0.3 | 0.5 |
| | $P(\overline{B})$ | 0.6 | 1 |

Ismerve a perem-eloszlások és az együttes eloszlás kapcsolatát, ezen adatok birtokában teljesen „rekonstruálható” az együttes eloszlás:

| X \ Y | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.3 | 0.5 |
| 1 | 0.2 | 0.3 | 0.5 |
| | 0.4 | 0.6 | 1 |

A várhatóérték kiszámításához egy másik táblázatot készítünk: legyen $Z = 3X^2 + 4Y^2 - 12XY$.

| (X, Y) | Z értéke | valószínűség | A szorzatuk |
|---|---|---|---|
| (0, 0) | 0 | 0.2 | 0 |
| (1, 0) | 3 | 0.2 | 0.6 |
| (0, 1) | 4 | 0.3 | 1.2 |
| (1, 1) | -5 | 0.3 | - 1.5 |
| | | az összegük adja E(Z)-t: | **0.3** |

**5. Feladat:** Legyenek A és B tetszőleges események H-ban. Jelölje X az A esemény, Y pedig a B esemény karakterisztikus függvényét. Legyenek

$$P(\overline{B} \mid A) = 1/3, \quad P(A \cup \overline{B}) = 0.6, \quad P(B \mid \overline{A}) = 4/7.$$

Számítsa ki az $E\left[\cos\left(\pi\left(2X^2 + Y^2\right)\right) - 8X + 5Y\right]$ várható értéket.

**Válasz:**

| X\Y | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| 0 | **0,3** | **0,4** | 0,7 |
| 1 | **0,1** | **0,2** | 0,3 |
| | 0,4 | 0,6 | 1 |

$$E\left[\cos\left(\pi\left(2X^2 + Y^2\right)\right) - 8X + 5Y\right] = \mathbf{0.4}$$

**6. Feladat.** Az (X,Y) vektorváltozóról a következő információink vannak (a tábla belseje az együttes valószínűség-eloszlást adja):

| X \ Y | $y_1$ = -0.2 | $y_2$ = -0.1 | $y_3$ = 0.1 | $y_4$ = 0.2 | $y_5$ = 0.3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = -0.2 | 0 | 0.05 | 0.05 | 0 | 0 |
| $x_2$ = 0.1 | 0.05 | 0.05 | 0.2 | 0.1 | 0 |
| $x_3$ = 0.2 | 0.05 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.05 |
| $x_4$ = 0.3 | 0 | 0 | 0.05 | 0 | 0.05 |

Számítsa ki azt a $0 < \lambda < 1$ értéket, amelyre a $D^2(\lambda X + (1-\lambda)Y)$ variancia a lehető legkisebb. Adja is meg ezt a minimális variancia értéket!

***Válasz:*** $\lambda_0 = \dfrac{354}{558} = 0.6344$ és $\mathrm{Var}(\lambda_0 X + (1-\lambda_0)Y) = 0.0115$.

**Megoldás:** Ismert összefüggés szerint

$$\mathrm{Var}(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X) + 2\lambda(1-\lambda)\,\mathrm{cov}(X,Y) + (1-\lambda)^2\,\mathrm{var}(Y).$$

A kérdéses variancia meghatározásához tudnunk kel a Var(X) és Var(Y) varianciákat valamint a cov(X,Y) kovarianciát. Ezek meghatározása pedig a következő képletek alapján történik:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X),\quad \mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) \text{ és } \mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Végeredményben az ismert együttes eloszlásból az E(X), E(Y), $E(X^2)$, $E(Y^2)$, E(XY) várható értékeket kell kiszámítani.

Az együttes eloszlásból közvetlenül ezek közül csak az E(XY) várhatóértéket tudjuk kiszámítani:

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} x_i y_j p_{ij} =$$

$$= (-0.2)(-0.1)0.05 + (-0.2)(0.1)0.05 + \cdots + (0.3)(0.1)0.05 + (0.3(0.3)0.05 = 0.0135$$

A többi adat kiszámításához szükségünk van a perem-eloszlások ismeretére is:

| X \ Y | $y_1$ = -0.2 | $y_2$ = -0.1 | $y_3$ = 0.1 | $y_4$ = 0.2 | $y_5$ = 0.3 | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ = -0.2 | 0 | 0.05 | 0.05 | 0 | 0 | 0.1 |
| $x_2$ = 0.1 | 0.05 | 0.05 | 0.2 | 0.1 | 0 | 0.3 |
| $x_3$ = 0.2 | 0.05 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.05 | 0.4 |
| $x_4$ = 0.3 | 0 | 0 | 0.05 | 0 | 0.05 | 0.1 |
| $\rho_j$ | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.1 | 1 |

Ebből már kiszámíthatóak a további várhatóértékek:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=(-0.2)\cdot 0.1+0.1\cdot 0.3+0.2\cdot 0.4+0.3\cdot 0.1=0.13,$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=(-0.2)^2\cdot 0.1+0.1^2\cdot 0.3+0.2^2\cdot 0.4+0.3^2\cdot 0.1=0.033$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.033-(0.13)^2=0.0161;$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{5}y_j\rho_j=(-0.2)\cdot 0.1+(-0.1)\cdot 0.2+0.1\cdot 0.4+0.2\cdot 0.2+0.3\cdot 0.1=0.07,$$

$$E(Y^2)=\sum_{j=1}^{5}y_j\rho_j=(-0.2)^2\cdot 0.1+(-0.1)^2\cdot 0.2+0.1^2\cdot 0.4+0.2^2\cdot 0.2+0.3^2\cdot 0.1=0.027,$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=0.27-(0.07)^2=0.0221;$$

cov(X,Y) = E(XY) – E(X)E(Y) = 0.0135 – (0.13)(0.07) = 0.0044.

Megkaptuk tehát a kérdéses varianciát:

$$Var(\lambda X+(1-\lambda)Y)=0.0161\lambda^2+0.0088\lambda(1-\lambda)+0.0221(1-\lambda)^2.$$

$\lambda$-nak azt az értékét keressük, amelyre ez a variancia a legkisebb. Legegyszerűbb eljárás a deriváltak vizsgálata alapján adódik. A további vizsgálathoz célszerű vagy teljesen, vagy csak részlegesen polinom alakokat használni:

$$f(\lambda)=Var(\lambda X+(1-\lambda)Y)=0.0161\lambda^2+0.0088(\lambda-\lambda^2)+0.0221(1-2\lambda+\lambda^2).$$

Ekkor

$$f'(\lambda)=0.0322\lambda+0.0088-0.0176\lambda-0.0442+0.0442\lambda=0.0558\lambda-0.0354$$

és

$$f''(\lambda)=0.7464.$$

$f(\lambda)$ tehát szigorúan konvex függvény, egyetlen stacionárius pontja $\lambda_0=\frac{354}{558}=0.6344$, amely tehát globális minimumhelye a függvénynek. A minimális variancia értéke pedig

$$f(0.6344)=0.0161\cdot(0.6344)^2+0.0088\cdot 0.6344\cdot 0.3656+0.0221\cdot 0.3656^2=0.0115$$

**7. Feladat.** Az X és Y valószínűségi változókról a következő ismereteink vannak:

$$E(X) = -5,\ E(Y) = 12,\ E(X^2) = 29,\ D(Y) = 3 \text{ és } R(X,Y) = -1/2.$$

Legyen Z = X + Y. Számítsa ki a $D^2(Z)$ szórásnégyzetet!

***Válasz:*** $D^2(Z) = Var(Z) = 7$.

**Megoldás:** Ismert képlet szerint

$$Var(X + Y) = Var(X) + 2cov(X, Y) + Var(Y).$$

Az adatok ismeretében kiszámíthatók

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4, \quad Var(Y) = 9 \text{ és } cov(X, Y) = R(X, Y)D(X)D(Y) = -3.$$

Ebből már adódik a válasz: $Var(X+Y) = 7$.