1. Legyenek A, B és C egy adott véletlen tömegjelenségre vonatkozó események. Végezzünk n-szeres megfigyelést az adott véletlen jelenségre vonatkozóan. Jelölje $f_n(A)$ az A esemény gyakoriságát (f = frequency), $rf_n(A)$ az A esemény relatív gyakoriságát (rf = relative frequency). Jelölje továbbá $crf_n(A|C)$ az A eseménynek a C eseményre vonatkoztatott feltételes relatív gyakoriságát (crf = conditional relative frequency).

a) Milyen kapcsolat van az $rf_n(A)$, $rf_n(B)$, $rf_n(A \cup B)$ és $rf_n(A \cap B)$ relatív gyakoriságok között?

b) Hogyan módosul ez a kapcsolat, ha A és B egymást kizáró események?

c) Milyen kapcsolat van a $crf_n(A|C)$, $rf_n(C)$ és $rf_n(A \cap C)$ relatív gyakoriságok között?

2. A Montmort-féle feladat: Elhelyezünk egy urnában n darab 1-től n-ig számozott egyforma golyót, majd ezeket egymás után véletlenszerűen kihúzzuk. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik golyó sem egyezik meg a kihúzásának a sorszámával?

Ugyanez más megfogalmazásban: egy táncversenyre n pár nevezett be. A táncrendet a zsűri véletlenszerűen határozza meg; a férfiak vakon, „sorshúzással" választanak partnert. Mi a valószínűsége, hogy senki sem került össze a párjával ?

Megoldás: a keresett esemény komplementerének a valószínűségét lehet a Poincaré-tétel segítségével meghatározni.

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye az i sorszámú golyó. Ha A jelöli azt az eseményt, hogy egyik golyó sem annyiadikra jött ki, amennyi a száma, akkor

$$A = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n \text{ és } \bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n .$$

P(A) kiszámítását a $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ formula segítségével fogunk eljutni, ahol a

$P(\bar{A}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűséget a Poincaré-formula segítségével könnyen ki lehet számítani.

Egy elemi esemény itt az n golyó egy sorrendje. Az összes sorrend száma n!. Ezek közül azok száma, amelyeknél az i számot viselő golyó az i-edik pozícióban van: (n-1)!, és így

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},\ i = 1,2,\ldots,n \quad \text{és így} \qquad S_1^{(n)} = n \cdot \frac{1}{n} = 1 .$$

Annak valószínűsége, hogy az i jelű golyó az i-edik, a j jelű pedig a j-edik pozícióban van

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},\ \ i \neq j.$$

Mivel a különböző (i, j) párok száma $\binom{n}{2}$, ezért $S_2^{(n)} = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}$.

Folytatva az eljárást $S_k^{(n)} = \frac{1}{k!}$, k = 1,2, …, n és így

$$P(\bar{A}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

A keresett valószínűség tehát:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}.$$

3. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljesen független események. Számítsa ki a

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

valószínűséget, ha adottak a $P(A_i) = p_i$, $i = 1,2,\dots,n$ valószínűségek.

4. A és B ugyanahhoz a véletlen tömegjelenséghez tartozó két esemény. Jelölje X az A esemény, Y pedig a B esemény indikátor változóját (karakterisztikus függvényét). Számítsa ki X és Y korrelációs együtthatóját, ha P(A) = 0.3, P(B) = 0.6 és $P(A \cap B) = 0.2$.