

Minimális kockázatú portfólió meghatározása

1 milliárd forintot akarunk részvényvásárlásra fordítani. Két részvény, A illetve B megvásárlása jöhet szóba. Tegyük fel, hogy az „A” jelű részvények vásárlására fordított pénzösszeg egy éves hozama $X\%$, a „B” jelű részvények vásárlására fordított pénzösszeg egy éves hozama $Y\%$. Az X és Y értékére vonatkozóan különböző tanácsadó cégek különböző becsléseket adtak. A 100 legjobb tanácsadó cég „tippjeit” az alábbi **gyakorisági táblázat** tartalmazza:

Y X	$y_1 = -30$	$y_2 = -20$	$y_3 = 10$	$y_4 = 30$	$y_5 = 40$
$x_1 = -20$	0	5	5	0	0
$x_2 = -10$	5	5	20	10	0
$x_3 = 30$	5	10	10	10	5
$x_4 = 40$	0	0	5	0	5

Határozzuk meg a legkisebb kockázattal járó pénzbefektetési kombinációt (portfóliót), vagy más szóval, állapítsuk meg, hogy hány forintért vegyünk A részvényt és hány forintért pedig B részvényt, ha elsődleges célunk a kockázat minimalizálása. Mekkora a várható hozama és varianciája az optimális portfóliónak?

Megoldás: Transzformáljuk a „gyakorisági táblázatot” relatív gyakorisági táblázattá:

Y X	$y_1 = -30$	$y_2 = -20$	$y_3 = 10$	$y_4 = 30$	$y_5 = 40$
$x_1 = -20$	0	0.05	0.05	0	0
$x_2 = -10$	0.05	0.05	0.2	0.1	0
$x_3 = 30$	0.05	0.1	0.1	0.1	0.05
$x_4 = 40$	0	0	0.05	0	0.05

A relatív gyakoriságot elfogadva valószínűségeként, ezzel a táblázattal úgy dolgozunk, mint az (X, Y) vektorváltozó együttes eloszlásával.

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre álló pénzünk α hányadát ($0 \leq \alpha \leq 1$) szándékozunk az „A” jelű részvénybe fektetnünk, a fennmaradó összegen pedig „B” jelű részvényt vásárolunk. Pénzünket egységyinek tekintve ekkor $Z(\alpha) = \alpha X + (1-\alpha)Y$ lesz a portfóliónk hozama.

Pénzügyi döntésünket a variancia alapján hozzuk, mivel a variancia egyúttal alkalmas a kockázat mértékét is kifejezni. A portfólió varianciájának kiszámítására a következő képlet szolgál:

$$\text{var}(Z(\alpha)) = \text{var}(X)\alpha^2 + 2\text{cov}(X, Y)\alpha(1-\alpha) + \text{var}(Y)(1-\alpha)^2.$$

A szükséges $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$ és $\text{cov}(X, Y)$ mennyiségek meghatározásához szükségünk van a fenti táblázat „peremezésére”, azaz a perem-eloszlások meghatározására is.

$X \backslash Y$	$y_1 = -30$	$y_2 = -20$	$y_3 = 10$	$y_4 = 30$	$y_5 = 40$	p_i
$x_1 = -20$	0	0.05	0.05	0	0	0.1
$x_2 = -10$	0.05	0.05	0.2	0.1	0	0.4
$x_3 = 30$	0.05	0.1	0.1	0.1	0.05	0.4
$x_4 = 40$	0	0	0.05	0	0.05	0.1
p_j	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	1

Ebből a „peremezett” eloszlás-táblázatból kiszámíthatók a következő adatok:

$$E(X) = 10, \quad E(X^2) = 600, \quad E(Y) = 7, \quad E(Y^2) = 550, \quad E(XY) = 160.$$

Ezekből az adatokból számíthatjuk ki a $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$ és $\text{cov}(X, Y)$ mennyiségeket.

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = 500, \quad \text{var}(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 501$$

és

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 90.$$

A portfólió varianciája tehát a következő:

$$f(\alpha) = \text{var}(Z(\alpha)) = 500\alpha^2 + 180\alpha(1 - \alpha) + 501(1 - \alpha)^2.$$

Ez egy α -ban másodfokú függvény. Szélsőértékét analitikus módszerrel a legegyszerűbb meghatározni:

$$f'(\alpha) = 1642\alpha - 822 \quad \text{és} \quad f''(\alpha) = 1642.$$

A második derivált mutatja, hogy konvex függvényről van szó, az első derivátnak egyetlen

zérushelye van $\alpha_0 = \frac{822}{1642} = 0.500609013$.

Eszerint 500 millió 609 ezer 013 forintért kell „A” jelű és 499 millió 390 ezer 987 forintért „B” jelű részvényt vásárolnunk. Ekkor a legkisebb a kockázat, varianciában mérve

$$\text{var}(0.5X + 0.5Y) = 295.25.$$

Az optimális portfólió várható hozama:

$$E(0.5X + 0.5Y) = 0.5E(X) + 0.5E(Y) = 0.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 7 = 5 + 3.5 = 8.5.$$

Minimális kockázatú portfólió kiszámítása II

P1. Feladat. 1 milliárd forintot szándékozunk részvény vásárlására fordítani. Két értékpapír megvásárlása jöhet szóba. A szakértői előrejelzések szerint az egyes részvényekre vonatkozó adatok a következők:

	várható hozam	a hozam szórása
1. részvény (X)	$E(X) = 13$	$D(X) = 15$
2. részvény (Y)	$E(Y) = 9.5$	$D(Y) = 13$

Ismert továbbá a hozam-változók korrelációja: $R(X, Y) = 0.2$. Határozza meg a minimális kockázatú befektetési kombinációt és számítsa ki annak várható hozamát és varianciáját.

Válasz: Jelölje a portfólió hozamát $Z = pX + (1-p)Y$.

$$\text{Mivel } \text{Var}(Z(p)) = 316p^2 - 260p + 169, \quad \text{ezért } p_{\text{opt}} = \frac{260}{632} = 0,4114,$$

$$E(Z_{\text{opt}}) = 0,4114 \cdot 15 + 0,5886 \cdot 13 = 10,9399 \quad \text{és} \quad \text{var}(Z_{\text{opt}}) = 115,5190.$$

P2. Feladat. 1 milliárd forintot szándékozunk részvény vásárlására fordítani. Két értékpapír megvásárlása jöhet szóba. A szakértői előrejelzések szerint az egyes részvényekre vonatkozó adatok a következők:

	várható hozam	a hozam szórása
1. részvény (X)	$E(X) = 12$	$D(X) = 12$
2. részvény (Y)	$E(Y) = 14$	$D(Y) = 15$

Ismert továbbá a hozam-változók korrelációs együtthatója: $R(X, Y) = -0.5$. Határozza meg a minimális kockázatú befektetési kombinációt és számítsa ki annak várható hozamát és varianciáját.

Válasz: Jelölje a portfólió hozamát $Z = pX + (1-p)Y$.

$$\text{Mivel } \text{Var}(Z(p)) = 549p^2 - 630p + 225, \quad \text{ezért } p_{\text{opt}} = \frac{630}{1098} = 0,5753,$$

$$E(Z_{\text{opt}}) = 0,5735 \cdot 12 + 0,4263 \cdot 14 = 12,8526 \quad \text{és} \quad \text{var}(Z_{\text{opt}}) = 44,2623.$$