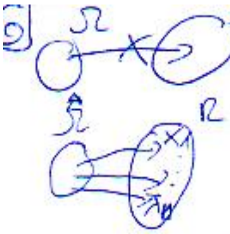
A hülye betű az KIS TETA

Maximum likelihood becslés dominált statisztikai mező esetén

1. A ϑ paraméter ***maximum likelihood*** (ML) becslése az a $\hat{\vartheta} = \vartheta(X)$ paraméterérték, amelyre $\vartheta \to f_{\vartheta}(X)$ (tehát a likelihood-függvény) maximális. Tehát azt a paramétert választjuk becslésnek, ami mellett az *X* minta bekövetkezésének „valószerűsége” a legnagyobb.
   Ha a log-likelihood függvény differenciálható, akkor a gyakorlatban a $\partial L(\theta) = 0$ ún. likelihood-egyenlet gyökeit határozzák meg és ezek közül keresik ki a globális maximumhelyet.
2. *Példa:* normális eloszlás esetén a várható érték ML-becslése a mintaátlag, a szórásnégyzet ML-becslése pedig a korrigálatlan tapasztalati szórásnégyzet: tehát ez utóbbi torzított.
3. *Tulajdonságai:*
   a) az ML-becslés nem feltétlenül létezik és nem feltétlenül egyértelmű
   b) az ML-becslés *invariáns*: ha *T(X)* a ϑ paraméter ML-becslése, akkor *g(T(X))* (az egyik) ML becslése lesz $g(\vartheta)$-nak. Tehát elég a paraméter becslését vizsgálni.
   c) ML-becslés *nem feltétlenül torzítatlan*.
   d) Viszont megfelelő regularitási feltételek (erős regularitás – RR) teljesülése esetén *aszimptotikusan konzisztens, aszimptotikusan normális és aszimptotikusan optimális.* Pontosabban, igaz a következő
   e) ***Tétel*:** (RR) teljesülése esetén a likelihood-egyenletnek (elég nagy *n*-re) létezik olyan $T_n(\underline{X})$ gyöke, amely a likelihood-függvény lokális maximumhelye és erõsen konzisztens. Továbbá ez a becsléssorozat aszimptotikusan normális és aszimptotikusan optimális:
   $\sqrt{n}(T_n(\underline{X}) - \vartheta) \to N(0, I_1(\vartheta)^{-1})$ eloszlásban.

2] 

$F(x) = ?$ mintavétel $(x_1, \ldots, x_n)$

olyan fv-t keresünk amely ezek a lehetséges értékei

Klasszikus valsz. modellben! $F_n(x) \approx F(x)$ egyező fv.

$\underbrace{P(|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon) \geq 1-\delta}_{n > N(\varepsilon, \delta)}$

$F_n(x) \Rightarrow F(x)$. változó mennyiségen tökéletlenül konvergál.

még erősebb kapcsolat: $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$

$P(0 = \lim D_n = 0) = 1$

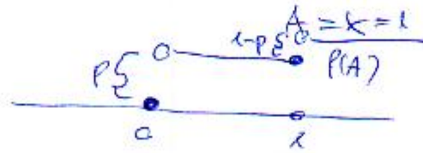
Glivenko-Cantelli tétel. (1940-es évek)

legnagyobb valószínűség elve alapján figyeljük: a maximum likelihood (1920-as évek)

X egy indikátor fv.

karakterisztikus fvé

két értéke lehet: 0 és 1 (vagy bejön vagy nem)



$P(x=1) = p$

$p = ? = P(A)$

$$P(X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2 \wedge \ldots \wedge X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n) =$$

$$= p^k \cdot (1-p)^{n-k} \to \max \qquad x_1 + \ldots + x_n = k$$

szorzati-likelihood logaritmussal $L(p; x_1, x_2, \ldots, x_n) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$\log L = k \cdot \log p + (n-k) \cdot \log(1-p) \overset{?}{\to} \max$$

$$\frac{d \log L}{dp} = k \cdot \frac{1}{p} + (n-k) \cdot \frac{1}{1-p} \cdot (-1)$$ ott lehet szélsőérték ahol

$$\frac{d \log L}{dp} = \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} = \underbrace{\frac{k - kp - np + kp}{p(1-p)}}_{} = \frac{k - np}{p(1-p)} = 0$$

szélsőérték, ha van: $p = \frac{k}{n} = \bar{x}$ (mintaátlag)

becsült érték.

$$\frac{d^2 \log L}{dp^2} = -\frac{k}{p^2} - \frac{n-k}{(1-p)^2} < 0$$ konkáv fv.

$\mathcal{P}(\lambda)$ (poisson eloszlás)

$$L(\lambda) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\log L(\lambda) = \log \lambda (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - n \cdot \lambda - \log(x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_n!) \to \max$$

$$\frac{d^2 \log L}{d\lambda^2} = -\frac{n \cdot \bar{x}}{\lambda^2} < 0 \qquad \frac{d \log L}{d\lambda} = \frac{\bar{x} \cdot n}{\lambda} - n \qquad \frac{\bar{x}}{\lambda} = 1 \qquad \lambda = \bar{x}$$

itt a max.

Binomiális eloszlás

$X \approx B(s, p) \to P(X=i) = \binom{s}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{s-i}$ (kikövő $s-x_1$)

$L(p) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \binom{s}{x_1} \cdot p^{x_1}(1-p)^{s-x_1} \cdots \binom{s}{x_n} p^{x_n}(1-p)^{s-x_n}$

Folytonos eset: $X : E(\lambda)$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

ha x_1 közel van X-hez:

$P(x \le X_1 < x_1 + h,\ x_2 < X_2 \le x_2 + h, \ldots)$ ~~$= P(x_1 \le X_1 \le x_1+h)$~~ ...

$\frac{F(x_1+h) - F(x_1)}{h} \approx f(x_1) \cdot h$

sűrűség f.

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ | $L(\lambda, x_1, \ldots x_i) = f(\lambda, x_1) \ldots f(\lambda, x_n) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda x_2} \ldots \lambda e^{-\lambda x_n} \to \max$

$\log L(\lambda) = -\lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n \cdot \log \lambda$

$\frac{d \log L}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - n \cdot \bar{x} = 0 \qquad \frac{d^2 \log L}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$

$x = \frac{1}{\lambda} \quad \lambda = \frac{1}{x} \qquad E\left(\frac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}\right) = \frac{n-2}{n-1} \cdot \lambda$ torzítatlan lenne.

Normális eloszlás:

$X \approx N(\mu, \sigma^2) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}$

variancia

$L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{v} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x_1-\mu}{2v}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x_2-\mu)}{2v}} \ldots$

$\ldots \sqrt{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2v}}$

$\log L(\mu, v)$ – Hesse mátrixot eredményez

VI.4.b Exponenciális eloszlás

Exponenciális eloszlás leginkább bizonyos véletlen hosszúságú időtartamok eloszlásaként lép fel. Exponenciális eloszlással írható le például egy olyan berendezésnek ill. alkatrésznek az élettartama, hibamentes működési ideje, melynek tönkremenetelét nem kopás vagy természetes elhasználódás okozza, hanem váratlan törés szakadás illetve egyéb véletlen ok.

Az exponenciális eloszlású valószínűségi változó
sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \langle 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$$, ahol $\lambda>0$

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \langle 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$$

várható értéke $M(\xi) = 1/\lambda$ és szórása: $D(\xi) = 1/\lambda$.

3. *Becsülje az exponenciális eloszlás* λ *paraméterét a momentumok módszerével!*

Az első sokasági momentum: $M_1 = E(Y) = \frac{1}{\lambda}$

A minta első momentuma: $m_1 = \frac{1}{n}\sum y_i = \overline{y}$

Feltételezve az (ismeretlen) sokasági és (kiszámított) mintamomentum megegyezését:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = M_1 = m_1 = \overline{y}$$

Ebből következik, hogy

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{y}}$$

Valamely előbbi nevezetes eloszlású sokaságból vett minta esetén az eloszlás ismeretlen paraméter(ei)t úgy becsülhetjük, hogy a mintaelemeket behelyettesítjük a kapott becslőfüggvény(ek)be.