Becslés momentumok módszerével

A momentumok módszere általában eloszlások paramétereinek becslésére szolgál. Olyan sokasági paramétereket keres, amelyek mellett a sokaság és a minta megfelelő momentumai megegyeznek.

1. *Becsülje a normális eloszlás* μ *és* σ^2 *paramétereit a momentumok módszerével!*

   Az első sokasági momentum: $M_1 = E(Y) = \mu$

   A második sokasági centrális momentum: $M_2(\mu) = E(Y-\mu)^2 = \sigma^2$

   A minta első momentuma: $m_1 = \frac{1}{n}\sum y_i = \overline{y}$

   A minta második centrális momentuma: $m_2(\overline{y}) = \frac{1}{n}\sum (y_i - \overline{y})^2 = {s^*}^2$

   Feltételezve az (ismeretlen) sokasági és (kiszámított) mintamomentumok megegyezését:

$$\hat{\mu} = M_1 = m_1 = \overline{y} \qquad \hat{\sigma}^2 = M_2(\mu) = m_2(\overline{y}) = {s^*}^2$$

2. *Becsülje az egyenletes eloszlás* α *és* β *paramétereit a momentumok módszerével!*

   Az első sokasági momentum: $M_1 = E(Y) = \frac{\alpha+\beta}{2}$

   A második sokasági centrális momentum: $M_2(\mu) = E(Y-\mu)^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

   A minta első momentuma: $m_1 = \frac{1}{n}\sum y_i = \overline{y}$

   A minta második centrális momentuma: $m_2(\overline{y}) = \frac{1}{n}\sum (y_i - \overline{y})^2 = {s^*}^2$

   Feltételezve az (ismeretlen) sokasági és (kiszámított) mintamomentumok megegyezését:

$$\frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{2} = M_1 = m_1 = \overline{y} \qquad \frac{(\hat{\beta}-\hat{\alpha})^2}{12} = M_2(\mu) = m_2(\overline{y}) = {s^*}^2$$

   Oldjuk meg a kapott egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{2} & = \overline{y} \\ \dfrac{(\hat{\beta}-\hat{\alpha})^2}{12} & = {s^*}^2 \end{cases}$$

   Egyszerűbb alakban felírva:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}+\hat{\beta} & = 2\overline{y} \\ \hat{\beta}-\hat{\alpha} & = \sqrt{12}s^* \end{cases}$$

   A két egyenletet összeadva:

$$2\hat{\beta} = 2\overline{y} + \sqrt{12}s^*$$

   Amiből

$$\hat{\beta} = \overline{y} + \sqrt{3}s^*$$

   Az első egyenletből kifejezve $\hat{\alpha}$-t:

$$\hat{\alpha} = 2\overline{y} - \hat{\beta}$$

   Tehát

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \overline{y} - \sqrt{3}s^* &&= \frac{1}{n}\sum y_i - \sqrt{\frac{3}{n}\sum (y_i-\overline{y})^2} \\ \hat{\beta} &= \overline{y} + \sqrt{3}s^* &&= \frac{1}{n}\sum y_i + \sqrt{\frac{3}{n}\sum (y_i-\overline{y})^2} \end{aligned}$$

3. *Becsülje az exponenciális eloszlás* λ *paraméterét a momentumok módszerével!*

Az első sokasági momentum: $M_1 = E(Y) = \frac{1}{\lambda}$

A minta első momentuma: $m_1 = \frac{1}{n} \sum y_i = \overline{y}$

Feltételezve az (ismeretlen) sokasági és (kiszámított) mintamomentum megegyezését:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = M_1 = m_1 = \overline{y}$$

Ebből következik, hogy

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{y}}$$

Valamely előbbi nevezetes eloszlású sokaságból vett minta esetén az eloszlás ismeretlen paraméter(ei)t úgy becsülhetjük, hogy a mintaelemeket behelyettesítjük a kapott becslőfüggvény(ek)be.