Predikátumlogika: predikátumok, kvantorok, predikátumlogikai formulák, formalizálás és interpoláció, predikátumlogikai következtetések.

Az A halmazon értelmezett n-változós **predikátum** vagy függvény definíciója: az A halmaz x_1, x_2,…, x_n elemire vonatkozó olyan P(x_1, x_2,…, x_n) nyílt kijelentő mondat, amely minden rögzített a_1, a_2,…, a_n esetén egy P(a_1, a_2,…, a_n) kijelentés. Pl.: ha $A = \mathbb{R}$, akkor P(x,y,z) = „x+y=z” egy, a valós számok halmazán értelmezett 3-változós predikátum. A P(2,1,3) = „2+1=3” egy igaz kijelentés. A 0-változós predikátum a kijelentés.

A „minden x-re” kifejezést **univerzális kvantor**nak nevezzük, jele $\forall x$. Ha P(x) egy, az A halmazon értelmezett 1-változós predikátum, akkor a $\forall x P(x)$ egy kijelentés, melynek logikai értéke 1, ha minden a-ra P(a)=1, és 0, ha van olyan a, melyre P(a)=0.

A „van olyan x, hogy” kifejezést **egzisztenciális kvantor**nak nevezzük, jele $\exists x$. Ha P(x) egy, az A halmazon értelmezett predikátum, akkor $\exists x P(x)$ egy kijelentés, melynek logikai értéke 0, ha minden a-ra P(a)=0, és 1, ha van olyan a, melyre P(a)=1.

A kijelentéslogika a kijelentések, állítások durvaszerkezetét tárja fel, a predikátumlogika pedig a finomszerkezetét a predikátumok és a logikai kvantorok használatával. A különbség tehát az, hogy a kijelentéslogikában nem szerepelnek predikátumok és logikai kvantorok, a predikátumlogikában viszont igen.
Egy kijelentés predikátumlogikai formalizálásán a kijelentés szerkezetének felírását értjük, elemi kijelentések, kvantorok és predikátumlogikai műveletek segítségével.

Példák: Az „Antal tanul” kijelentés finomszerkezete: Q(a), ahol Q(x): „x tanul” egy 1-változós predikátum személyek egy S halmazán. Itt Antal egy **individuum**, ennek jelölése a. Egy 2-változós predikátum jelölése H(x,y), ahol az x és az y individuumváltozók. Az individuumtartomány az a halmaz, amelyiken a predikátum definiált. Ha egy predikátumban valamely individuumváltozó helyébe konkrét individuumnevet írunk, akkor **konkretizáció**ról beszélünk. Konkretizáció során a predikátum argumentumszáma csökken. Predikátumból egy kijelentést konkretizációval képezhetünk.

Predikátumlogikai **formulák** a következő módon adhatók meg:

- a kijelentésváltozók formulák
- ha P egy n-változós predikátum és $x_1, x_2, \dots, x_n$ individuumváltozók vagy individuumnevek, akkor $Px_1x_2\dots x_n$ és $x_1 \equiv x_2$ formulák (az $x_1 \equiv x_2$ az azonosságpredikátum, „x_1 azonos x_2-vel”)
- ha A és B formulák, akkor $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ is formulák
- ha A egy formula és x individuumváltozó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is formulák
- más jelsorozat nem formula

Predikátumlogikai **interpretáció**: adjuk meg a $B = (Pa \wedge \neg Qa) \rightarrow \exists x(Px \wedge \neg Qx)$ formulának egy interpretációját. Legyen az individuumtartomány a valós számsorozatok S halmaza. A Px és Qx predikátumváltozóknak konkrét predikátumokat feleltetünk meg: Px-nek az „x korlátos sorozat”, Qx-nek az „x konvergens sorozat” predikátumokat, az a-hoz pedig S-nek az $a_n=(-1)^n$ elemét rendeljük. Ezek után a formula szöveges interpretációja így hangzik: „Ha az $a_n=(-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens, akkor létezik olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens”.
A predikátumlogikai formula interpretálása bonyolultabb, mint a kijelentéslogikai, mivel az individuumtartomány különféle megválasztása, a predikátumváltozók jelentésének megadása más-más interpretációt eredményez.

Predikátumlogikai **következtetések**: a predikátumlogikai következményrelációja azonos a kijelentéslogikában használttal, de itt formulán predikátumlogikai formulát, interpretáción pedig predikátumlogikai interpretációt kell érteni.
Emlékeztető: Egy következtetés egy vagy több feltételből (premisszából), és egy állításból (konklúzió) áll. Ha egy premissza van, akkor az A formulából következik a B formula (a B formula következménye az A formulának), ha az $A \to B$ *formula tautológia (azonosan igaz formula). Jelölése:* $A \Rightarrow B$*, és akkor igaz, ha minden interpretáció, amely A-t igazzá teszi, a B-t is igazzá teszi. Az* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *premisszáknak következménye a B konklúzió, ha minden olyan interpretáció, amely az* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *mindegyikét igazzá teszi, a B-t is igazzá teszi. Az* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *premisszák helyettesíthetőek az* $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ *formulával.*