Vektortér, dimenzió, lineáris leképezések, bilineáris függvények

Definíció 1 ***(Vektortér)*** *Legyen T test. A $V \neq \emptyset$ halmazt a T test feletti vektortérnek nevezzük, ha*

- *a V halmazon értelmezve van egy* ***összeadás*** *nevű művelet, amelyre a V zárt, azaz*
$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in V \quad \underline{u} + \underline{v} \in V$$
- *az összeadás* ***asszociatív****, azaz*
$$\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V \quad (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$$
- *az összeadás* ***kommutatív****, azaz*
$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in V \quad \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$$
- *létezik* ***nullelem****, azaz van olyan $\underline{0} \in V$, hogy*
$$\forall \underline{u} \in V \quad \underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u}$$
- *minden elemnek létezik* ***ellentett****je, azaz bármely $\underline{u} \in V$-hez $\exists -\underline{u} \in V$ amelyre*
$$\underline{u} + (-\underline{u}) = (-\underline{u}) + \underline{u} = \underline{0}$$
- *értelmezve van egy $T \times V \to V$ művelet, a* ***skalárral való szorzás****, amelyre V zárt, azaz*
$$\forall \lambda \in T, \underline{u} \in V \quad \lambda \underline{u} \in V$$
- *Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $\underline{u} \in V$ esetén*
$$(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda \underline{u} + \mu \underline{u}$$
- *Bármely $\lambda \in T$ és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén*
$$\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v}$$
- *Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $\underline{u} \in V$ esetén*
$$(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu \underline{u})$$
- *Bármely $\underline{u} \in V$ esetén, ha 1 a T test egységeleme a szorzásra nézve, akkor*
$$1\underline{u} = \underline{u}$$

A V halmaz elemeit ekkor ***vektor****oknak, a T test elemeit pedig* ***skalár****oknak nevezzük.*

Példák:

- Az origón átmenő síkok illetve a tér vektorai a valós számok teste feletti vektortér. (A vektorokat az origóból indítjuk.)
- T^k a T test felett vektortér, ha a műveleteket komponensenként végezzük. Ennek speciális esetei az előző példák. ($\mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{R}^3$)
- Az $[a, b]$-n értelmezett valós függvények, az $[a, b]$-n integrálható függvények a szokásos műveletekre a valós számtest feletti vektortér.

Definíció 2 ***(Altér)*** *Legyen V egy T test feletti vektortér. A $W \subseteq V$ halmazt a V vektortér alterének nevezzük, ha W maga is vektortér a T felett a V-beli műveletekre. Jelölés $W \leq V$*

Tétel 1 ***(Altér szükséges és elégséges feltétele)*** *Legyen V egy T test feletti vektortér. A $W \subseteq V$ halmaz akkor és csak akkor altér, ha zárt az összeadásra és a skalárszorosra. Azaz $\forall \underline{u}, \underline{v} \in W : \underline{u} + \underline{v} \in W$ és $\forall \underline{u} \in W, \lambda \in T : \lambda \underline{u} \in W$.*

Példák:

- V és $\{\underline{0}\}$ alterek V-ben. Ezek az úgynevezett *triviális* alterek.
- Az origón átmenő sík alterei az origón átmenő, adott síkbeli egyenesek. A tér alterei az origón átmenő síkok.
- Az $[a, b]$-n integrálható függvények alteret alkotnak az $[a, b]$-n értelmezett valós függvények terében.

Definíció 3 *(**Lineáris kombináció**) Legyen V a T test feletti vektortér, $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V$. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációja:*

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \cdots + \lambda_k \underline{a}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i \quad \lambda_i \in T$$

Definíció 4 *(**Generátorrendszer**) Legyen V a T test feletti vektortér. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V$ vektorrendszert V-beli generátorrendszernek nevezzük, ha V minden eleme felírható az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

Definíció 5 *(**Lineáris függetlenség**) Legyen V a T test feletti vektortér. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V$ vektorokat lineárisan független vektoroknak nevezzük, ha csak a csupa nulla együtthatókkal felírt lineáris kombinációjuk állítja elő V nullvektorát. Azaz $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i = \underline{0} \Longrightarrow \lambda_i = 0 \forall i = 1, \ldots, k$.*

Definíció 6 *(**Bázis, dimenzió**) Legyen V a T test feletti vektortér. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V$ vektorokat a V vektortér bázisának nevezzük, a generátorrendszert alkotnak és lineárisan függetlenek.*
A bázis elemszámát a vektortér dimenziójának nevezzük. (Ugyanis minden bázis elemszáma ugyanaz!) Jelölés: $dimV$

Megj: A bázis maximális független rendszer és minimális generátorrendszer.
A vektortér összes vektora egyértelműen írható fel a bázis elemeinek lineáris kombinációjaként. Ekkor a lineáris kombináció együtthatóit (λ_i-ket) a vektor koordinátáinak nevezzük az adott bázisban.
Ha $W \leq V$, akkor $dimW \leq dimV$.

Példa: A szokásos $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. $dim\mathbb{R}^3 = 3$.

Definíció 7 *(**Lineáris leképezés, izomorfizmus**) Legyenek V_1, V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Az $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ függvényt (leképezést) lineáris leképezésnek nevezzük, ha műveletttartó. Azaz*

$$\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in V_1 : \quad \mathcal{A}(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \mathcal{A}\underline{u}_1 + \mathcal{A}\underline{u}_2$$

$$\forall \underline{u} \in V_1, \lambda \in T : \quad \mathcal{A}(\lambda \underline{u}) = \lambda(\mathcal{A}\underline{u})$$

*Ha $\mathcal{A}$ bijekció, akkor a leképezést **izomorfizmus**nak nevezzük. Ha létezik $V_1 \to V_2$ bijekció, akkor azt mondjuk, hogy V_1 és V_2 izomorf vektorterek. Jelölés: $V_1 \cong V_2$*

Példák: $\mathbb{R}^2$-ben tükrözés origón átmenő egyenesre, merőleges vetítés origón átmenő egyenesre, forgatás az origó körül.
Megj: A lineáris leképezéseket mátrixszal reprezentálhatjuk. A reprezentáló mátrix függ a két vektortérben választott bázistól. Pl. az $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ ($dimV_1 = n, dimV_2 = m$) leképezéshez V_1 és V_2 adott bázisa mellett egyértelműen létezik $A \in T^{m \times n}$ mátrix, hogy a leképezés $A\underline{u} = \underline{v}$ alakban írható fel.

Definíció 8 *(**Lineáris leképezés képtere és magtere**) Legyen $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés.*
Képtér: $Im\mathcal{A} := \{\underline{v} \in V_2 : \exists \underline{u} \in V_1, \mathcal{A}\underline{u} = \underline{v}\}$
Magtér: $Ker\mathcal{A} := \{\underline{u} \in V_1 : \mathcal{A}\underline{u} = \underline{0}\}$, ahol $\underline{0}$ a V_2 nullvektora.

Megj: $Im\mathcal{A}$ altér V_2-ben, $Ker\mathcal{A}$ altér V_1-ben.

Tétel 2 ***(Dimenzió tétel)*** *Legyen $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, $dim V_1$ véges. Ekkor*

$$dim(Im\mathcal{A}) + dim(Ker\mathcal{A}) = dim V_1$$

Definíció 9 ***(Bilineáris függvények)*** *Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett. Az $\mathbf{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezést (valós) bilineáris függvénynek nevezzük, ha mindkét változójában lineáris. Azaz $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\mathbf{A}(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) + \mathbf{A}(\underline{w}, \underline{v})$$

$$\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v} + \underline{w}) = \mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) + \mathbf{A}(\underline{u}, \underline{w})$$

$$\mathbf{A}(\lambda\underline{u}, \underline{v}) = \lambda\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v})$$

$$\mathbf{A}(\underline{u}, \lambda\underline{v}) = \lambda\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v})$$

Példa: Az egyik legfontosabb bilineáris függvény a *skaláris szorzat.* Ha $V = \mathbb{R}^n$, akkor $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, ahol u_i, v_i a vektorok koordinátáit jelentik egy adott bázisban.

Tétel 3 ***(Bilineáris függvények mátrix reprezentációja)*** *Rögzített bázis mellett bijekció áll fenn a V-n értelmezett bilineáris függvények és az $n \times n$-es (valós) mátrixok között. Ha $\underline{u}$, illetve $\underline{v}$ koordinátái az adott bázisban $u_1, \ldots, u_n$, illetve $v_1, \ldots, v_n$, akkor*

$$\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} u_i v_j$$

Mátrixos alakban (az $\mathbf{A}$ bilineáris függvényhez $A := \alpha_{ij}$ mátrix):

$$\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T A \underline{v}$$

Példa: A skaláris szorzat, mint bilineáris függvény mátrixa az egységmátrix.

Definíció 10 ***(Szimmetrikus bilineáris függvények)*** *Az $\mathbf{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris függvény szimmetrikus, ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén*

$$\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) = \mathbf{A}(\underline{v}, \underline{u})$$

.

Tétel 4 *Ha $\mathbf{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris függvény, akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben $\mathbf{A}$ mátrixa diagonális.*

Definíció 11 ***(Ortogonalitás)*** *Legyen $\mathbf{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris függvény. Az $\underline{u}, \underline{v} \in V$ vektorok $\mathbf{A}$-ortogonálisak, ha $\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) = 0$.*

Definíció 12 ***(Euklideszi tér)*** *A skaláris szorzattal ellátott vektorteret Euklideszi térnek nevezzük.*