Függvények határértéke, folytonossága. Folytonos függvények tulajdonságai. (Egy és többváltozós esetben)

Definíció 1 ***(Függvény határértéke, végesben vett véges határérték, Heine féle def.)***
Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0-ban A, ha bármely $x_n \to x_0, \quad x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$. Ehhez hasonló definíció alkalmazható a végtelenben vett véges ill. végtelen határértékre is.

Definíció 2 ***(Függvény határértéke, végesben vett véges határérték, Cauchy féle def.)***
Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0-ban A, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ küszöbszám, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad vagy \quad f(x) \to A, \quad ha \quad x \to x_0$$

Példa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Definíció 3 ***(Függvény határértéke, végesben vett végtelen határérték)***
Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0-ban ∞, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik olyan δ küszöbszám, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Jelölés:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad vagy \quad f(x) \to \infty, \quad ha \quad x \to x_0$$

Definíció 4 ***(Függvény határértéke, végtelenben vett végtelen határérték)***
Az $f(x)$ függvény határértéke az ∞-ben ∞, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik olyan x_K küszöbszám, hogy $x > x_K$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Jelölés:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad vagy \quad f(x) \to \infty, \quad ha \quad x \to \infty$$

Tétel 1 ***(Határérték és műveletek)***
Ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ $(A, B \in \mathbb{R})$, akkor $x \to x_0$ esetén

- $c \cdot f(x)) \to c \cdot A$
- $f(x) + g(x) \to A + B$
- $f(x) - g(x) \to A - B$
- $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}, \quad ha \quad B \neq 0$

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = lna, \quad \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{k}{x})^x = e^k$$

Definíció 5 ***(Függvény folytonossága)***
Az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ helyen, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ küszöbszám, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tétel 2 ***(Határérték és folytonosság kapcsolata)***
Ha $x_0 \in D_f$ és $f(x)$-nek van x_0-ban határértéke és ez a határérték éppen $f(x_0)$, akkor $f(x)$ folytonos az x_0 helyen. (Ez lehetne a folytonosság definíciója is!)
Ha $f(x)$ folytonos az x_0 helyen, akkor $f(x)$-nek van az x_0-ban határértéke és ez a határérték éppen $f(x_0)$.

Tétel 3 *Zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.*

Tétel 4 *Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit.*

Tétel 5 ***(Bolzano tétel)***
Ha $f(x)$ az $[a, b]$-n folytonos függvény (és tfh. $f(a) \leq f(b)$), akkor $\forall A \in [f(a), f(b)]$ esetén létezik $c \in [a, b]$, melyre $f(c) = A$. (Azaz f Darboux tulajdonságú)
Ennek speciális esete a spec. Bolzano-tétel: Ha egy zárt intervallumon folytonos függvény az intervallum végpontjaiban ellentétes előjelű, akkor van zérushelye az intervallum belsejében.

Tétel 6 *Zárt intervallumon folytonos függvény értékkészlete zárt intervallum.*