Mátrixok, determináns, lineáris egyenletrendszerek, oszlopvektorok tere

Mátrixok

Definíció 1 ***(Mátrix)*** *Legyen T test. (T általában $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) A T elemeiből képzett, n sorból és m oszlopból álló (téglalap alakú) táblázatot $n \times m$-es mátrixnak nevezzük. Jelölés: A mátrix, $A \in T^{n \times m}$. Az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme: $a_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$. Jelölés: $A = \{a_{ij}\}$*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Megj: Ha $n = m$, azaz $A \in T^{n \times n}$, akkor négyzetes mátrixról beszélünk.
Azt a négyzetes mátrixot, ahol a főátló elemei (a_{ii}-k) 1-esek, mindenhol máshol csupa nulla *egységmátrix*nak nevezzük.

Műveletek mátrixokkal

Definíció 2 ***(Összeadás)*** *Azonos típusú mátrixokon definiáljuk az összeadást. Ekkor az összeadást elemenként végezzük (megfelelő elemet a megfelelő elemhez adjuk.) Azaz legyen $A, B \in T^{n \times m}, A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}$. Ekkor $A + B := \{a_{ij} + b_{ij}\}$.*

Definíció 3 ***(Skalárral való szorzás)*** *A mátrix minden elemét megszorozzuk ugyanazzal a skalárral. Azaz legyen $A \in T^{n \times m}, A = \{a_{ij}\}, \lambda \in T$. Ekkor $\lambda A := \{\lambda a_{ij}\}$.*

Tétel 1 ***(Mátrixok tere)*** *A $T^{n \times m}$-beli mátrixok a fenti összeadásra és szorzásra nézve T feletti vektorteret alkotnak.*

Megj: Az $n \times m$-es mátrixok terének dimenziója $n \cdot m$.

Definíció 4 ***(Szorzás)*** *Legyen $A \in T^{n \times r}, B \in T^{r \times m}$ mátrixok. (Tehát A oszlopainak száma egyezzen meg B sorainak számával!). Ekkor a $C := A \cdot B, C \in T^{n \times m}$ mátrixot így definiáljuk ($A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}, C = \{c_{ij}\}$):*

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

(A C i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy vesszük az A i-edik sorának és a B j-edik oszlopának skaláris szorzatát.)

Megj: A mátrixok szorzása nem kommutatív. Sőt: Ha $A \cdot B$ elvégezhető, akkor nem biztos, hogy $B \cdot A$ is elvégezhető. Akkor és csak akkor végezhető el a szorzás mindkét irányban, ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok. De a kommutativítás ezeknél sem teljesül.
A T test feletti $n \times n$-es mátrixok a fenti összeadásra és szorzásra nézve gyűrűt alkotnak. A szorzás egységeleme az egységmátrix.

Definíció 5 ***(Transzponálás)*** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ekkor A transzponáltja, A^T az az $m \times n$-es mátrix, melyre $a^T_{ij} = a_{ji}$. Négyzetes mátrixok esetén a transzponáltat úgy kapjuk, hogy az elemeket tükrözzük a főátlóra (a_{ii} elemek).*

Determináns

Definíció 6 ***(Permutáció, inverzió)*** *Az $1, 2, \dots, n$ elemek egy sorrendjét az elemek egy permutációjának nevezzük. A permutáció valójában egy $\{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekció. A permutációban két elem inverzióban áll, ha közülük a nagyobb megelőzi a kisebbet. Egy permutáció inverziószámán az inverzióban álló elempárok számát értjük. Ha σ-val jelöljük a permutációt, akkor a σ permutáció inverziószámát $I(\sigma)$-val jelöljük.*

Definíció 7 ***(Determináns)*** *Legyen $A \in T^{n\times n}$ mátrix.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az A mátrix determinánsa, $\det A$ *az alábbi módon képzett T-beli elem (szám):*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Példa: 2×2-es determináns

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determináns tulajdonságai

- Ha a főátló felett (alsó háromszög mátrix) vagy a főátló alatt (felső háromszög mátrix) minden elem nulla, akkor a determináns a főátlóbeli elemek szorzata.
- Ha valamelyik sor vagy oszlop minden eleme nulla, akkor a determináns nulla.
- Ha valamelyik sor vagy oszlop minden elemét λ-val szorozzuk, akkor a determináns λ-val szorzódik.
- Ha két sor (vagy két oszlop) egyenlő, akkor a determináns nulla.
- Ha valamelyik sor (illetve oszlop) egy másik sor (illetve oszlop) λ-szorosa, akkor a determináns nulla.
- Ha két sort (két oszlopot) felcserélünk, akkor a determináns ellentettjére változik.
- Ha az elemeket a főátlóra tükrözzük, akkor a determináns nem változik.
- Ha egy sorhoz hozzáadjuk a többi sor lineáris kombinációját, akkor a determináns nem változik.

Definíció 8 ***(Előjeles aldetermináns)*** *Ha egy $n \times n$-es determináns (illetve mátrix) i-edik sorát és j-edik oszlopát elhagyjuk, akkor egy $(n-1) \times (n-1)$-es determinánsot kapunk. Az a_{ij} elemhez tartozó A_{ij}* ***előjeles aldeterminánson*** *ennek a determinánsnak a $(-1)^{i+j}$-szeresét értjük.*

Definíció 9 ***(Kifejtési tétel)*** *Determináns i-edik sor szerinti kifejtése:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

ahol A_{ij} az $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldetermináns.
Hasonlóan működik az oszlop szerinti kifejtés is.

Tétel 2 $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Vandermonde determináns

$$V(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) := \begin{vmatrix} 1 & \omega_1^1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2^1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^1 & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (\omega_i - \omega_j)$$

Tétel 3 *(**Mátrix inverzének létezése**) Az $A \in T^{n\times n}$ mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha* $\det A \neq 0$. *(A^{-1} az a mátrix, melyre $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, ahol I az egységmátrix) Ha* $\det A \neq 0$, *akkor*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

ahol A_{ij} az $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldetermináns.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció 10 *(**Lineáris egyenletrendszer**) Az*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n$$

n darab egyenletet m ismeretlenes ($x_1, x_2, \dots, x_m$ ismeretlenek, a_{ij}, b_i adott) lineáris egyenletrendszernek nevezzük. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ekkor az lineáris egyenletrendszert mátrix alakban felírva: $A\underline{x} = \underline{b}$. Adott $A, \underline{b}$ és keressük az $\underline{x}$ megoldásvektort.

Gauss elimináció

A Gauss elimináció egy többlépéses módszer az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására. A módszer lényege, hogy az $A|\underline{b}$ $n \times (m+1)$-es, úgynevezett kibővített mátrixon sorműveleteket végzünk addig, amíg a lehető legtöbb elem kinullázásával olyan ekvivalens egyenletrendszerhez (mátrixhoz) jutunk, amelyből a megoldások (amennyiben létezik megoldás) már könnyen leolvashatók illetve felírhatók. Megengedett sorműveletek a következők (sor=egyenlet):

- Egy sort egy nem nulla skalárral beszorozhatunk.
- Egyik sorhoz hozzáadhatjuk egy másik sor skalárszorosát.
- Két sort felcserélhetünk.
- A csupa nullából álló sorokat elhagyhatjuk.

A cél egy olyan alak elérése (redukált lépcsős alak), ahol

- a sorok (esetleg néhány nullát követően) 1-gyel kezdődnek
- az ilyen egyesek alatt és fölött a többi sorban mindent kinullázzunk

Megj: Bizonyos források csak azt hívják Gauss eliminációnak, amíg a sorok egy nem nulla számmal kezdődnek (tehát nem normáljuk őket 1-re) és csak alattuk nullázunk ki mindent, felettük nem. Ebben az esetben, ha az eljárás többi részét (1-esre normálás, nullázás az 1-esek fölött) is megcsináljuk akkor azt Gauss-Jordan eliminációnak nevezik.

Definíció 11 ***(Mátrix rangja)*** *Legyen $A \in T^{n \times m}$ mátrix. Az A mátrix oszloprangjának nevezzük az oszlopvektorokból alkotható maximális független rendszer elemszámát. Ez nem más, mint az oszlopvektorok által generált vektortér dimenziója. Hasonlóan definiálható a mátrix sorrangja is. Belátható, hogy a sor és oszloprang egyenlő, ezt a mátrix rangjának nevezzük. Jelölés $r(A)$*

Tétel 4 ***(Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága)*** *Az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $r(A) = r(A|b)$. A megoldás csak akkor egyértelmű, ha ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával.*

Tétel 5 ***(Cramer szabály)***
Ha $A \in T^{n \times n}$ és $\det A \neq 0$, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy $\underline{x}$ megoldása van és

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A} \quad k = 1, \ldots, n$$

ahol az A_k mátrixot úgy kapjuk, hogy az A mátrix k-adik oszlopát $\underline{b}$-re cseréljük.

Tétel 6 *Ha $A \in T^{n \times n}$ és $\det A = 0$, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer vagy nem oldható meg vagy egynél több megoldása van.*

Tétel 7 *Ha $A \in T^{n \times n}$, akkor az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik $\underline{0}$-tól különböző megoldása, ha $\det A = 0$.*