Kijelentéslogika: Kijelentések, műveletek kijelentésekkel, formulák, formalizálás, diszjunktív és konjunktív normálformák, kijelentéslogikai következtetések és következtetési formák.

A kijelentés (ítélet vagy állítás) olyan jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondat, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Jelölés: *p, q, r…* Például:

- *p*: "A 17 prímszám." igaz kijelentés,
- *q:* "A 14 osztható 4-gyel." hamis kijelentés.

Kijelentésekből összetett kijelentések képezhetők logikai alapműveletekkel:

- Negáció: A *p* kijelentés negációja (tagadása) a „nem *p*” kijelentés, jele ¬p. A ¬p akkor igaz, ha p hamis, és akkor hamis, ha p igaz.
- Diszjunkció: A p, q kijelentések diszjunkciója a „p vagy q” kijelentés, jele $p \vee q$, mely akkor és csak akkor igaz, ha p, q közül legalább az egyik igaz. Ez a forma a megengedő vagy. A kizáró vagy akkor és csak akkor igaz, ha a kettő közül kizárólag az egyik igaz.
- Konjunkció: A p, q kijelentések konjunkciója a „p és q” kijelentés, jele $p \wedge q$, ami akkor és csak akkor igaz, ha p, q közül mindkettő igaz.
- Implikáció: A p, q kijelentések implikációja a „p implikálja q-t” vagy „p-ből következik q” kijelentés, jele $p \rightarrow q$, mely akkor és csak akkor hamis, ha p igaz és q hamis. A p az implikáció előtagja, q az utótagja.
- Ekvivalencia: A p, q kijelentések ekvivalenciája a „p ekvivalens q-val” vagy „p akkor és csak akkor, ha q” kijelentés, jele $p \leftrightarrow q$, mely igaz, ha p, q egyidejűleg igaz vagy hamis, és hamis, ha p, q közül egyik igaz, a másik hamis.

Ha p, q, r tetszőleges kijelentések, akkor

1. $|(p \wedge q) \wedge r| = |p \wedge (q \wedge r)|, |(p \vee q) \vee r| = |p \vee (q \vee r)|$, asszociativitás
2. $|p \wedge q| = |q \wedge p|, |p \vee q| = |q \vee p|$, kommutativitás
3. $|p \wedge (p \vee q)| = |p|, |p \vee (p \wedge q)| = |p|$, abszorpció
4. $|p \wedge (q \vee r)| = |(p \wedge q) \vee (p \wedge r)|, |p \vee (q \wedge r)| = |(p \vee q) \wedge (p \vee r)|$, disztributivitás
5. $|p \vee \neg p| = 1, |p \wedge \neg q| = 0$
6. $|\neg(p \wedge q)| = |\neg p \vee \neg q|, |\neg(p \vee q)| = |\neg p \wedge \neg q|$, (de Morgan képletek)
7. $|p \wedge p| = |p|, |p \vee p| = |p|$
8. $|\neg\neg p| = |p|$, kettős tagadás elve
9. $|p \leftrightarrow q| = |(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)|$
10. $|p \rightarrow q| = |\neg p \vee q|$.

Az A halmazon értelmezett n-változós predikátum vagy függvény definíciója: az A halmaz $x_1, x_2,…, x_n$ elemire vonatkozó olyan $P(x_1, x_2,…, x_n)$ nyílt kijelentő mondat, amely minden rögzített $a_1, a_2,…, a_n$ esetén egy $P(a_1, a_2,…, a_n)$ kijelentés. Pl.: ha $A = \mathbb{R}$, akkor P(x,y,z) = „x+y=z” egy, a valós számok halmazán értelmezett 3-változós predikátum. A P(2,1,3) = „2+1=3” egy igaz kijelentés. A 0-változós predikátum a kijelentés.

Adott négy kijelentés, amelyek közötti összefüggéseket a következő szerkezetben lehet leírni: $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow \neg s)$. A kijelentések szerkezetének, ún. durvaszerkezetének így történő felírását **formalizálás**nak, a kapott jelsorozatot pedig **formulának** nevezzük. A durvaszerkezet csak formális séma, nem használja ki sem a kijelentések tartalmát, sem belső szerkezetét.
A kijelentéslogika szimbólumai:

- kijelentésváltozók jelei: p, q,…
- logikai műveletek jelei: ¬, →, ↔,∧,∨
- zárójelpárok: (,)

A kijelentéslogika formulái:

- a kijelentésváltozók jelei formulák
- ha A, B formulák, akkor $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ is formulák
- minden formula előáll véges sok lépésben az előző két pont formuláiból

Diszjunktív normálforma: olyan alakú formula, amiben konjunkciók diszjunkciója szerepel (matematikai analógiában ez polinomok szorzatának összege). Pl.: $A = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$. Ennek a formulának a diszjunkciós tagjaiban konjunkciós tagként mind a három kijelentésváltozó előfordul, így ez a formula teljes diszjunktív normálforma. Az $A = (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ formula (ami azonos az előző formulával), nem teljes diszjunktív normálforma.

Konjunktív normálforma: olyan alakú formula, amiben diszjunkciók konjunkciója szerepel. Pl.: $C = (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$, ami teljes konjunktív normálforma. A $C = (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ pedig egy nem teljes konjunktív normálforma.

A logikában fontos a **következtetések** vizsgálata. Egy következtetés egy vagy több feltételből (premisszából), és egy állításból (konklúzió) áll. Ha egy premissza van, akkor az A formulából következik a B formula (a B formula következménye az A formulának), ha az $A \rightarrow B$ formula tautológia (azonosan igaz formula). Jelölése: $A \Rightarrow B$, és akkor igaz, ha minden interpretáció, amely A-t igazzá teszi, a B-t is igazzá teszi. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ premisszáknak következménye a B konklúzió, ha minden olyan interpretáció, amely az $A_1, A_2, \dots, A_n$ mindegyikét igazzá teszi, a B-t is igazzá teszi. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ premisszák helyettesíthetőek az $\mathrm{A}_1 \wedge \mathrm{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{A}_\mathrm{n}$ formulával.

Néhány egyszerű, gyakori következtetési séma:

Leválasztási szabály (modus ponens):

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Az indirekt bizonyítás sémája (modus tollens):

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{A}$$

Redukció ad abszurdum (lehetetlenre való visszavezetés sémája):

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \rightarrow \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Kontrapozíciós következtetési séma:

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

Diszjunktív szillogizmus (modus tollendo ponens):

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg B \end{array}}{A}$$

Láncszabály vagy feltételes szillogizmus:

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{array}}{A \rightarrow C}$$