Lineáris programozási feladatok, megoldásuk szimplex módszerrel. Hálózati folyam feladatok, hálózati szimplex módszer.

Szabó Attila

2011. június 24.

Lineáris programozási feladatok

1. Definíció (Optimumszámítási modell)**.** *A gyakorlati élet problémacsoportjait formálisan leíró modelleket* ***optimumszámítási modellnek*** *nevezzük, amelyek egy feltételrendszerből és egy vagy több célfüggvényből állnak.*

Kapcsolódó fogalmak:

- **elemi tevékenység**: Teljes tevékenységnek az a pontosan körülhatárolt része, melyet már nem szándékozunk tovább bontani: $E_1, E_2, \ldots, E_n$
- **intenzitás érték**: Elemi tevékenységhez rendelt pozitív valós szám: x_i $(E_i \mapsto x_i)$
- **feladat lehetséges megoldása**: $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, ha minden feltételt kielégít. Lehetséges megoldások halmaza: $\mathcal{L}$
- **célfüggvény**: $z\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ függvény, amely a lehetséges megoldások ,,jóságát" elemzi

2. Definíció (LP-feladat)**.** *Olyan optimumszámítási modell, ahol a feltételek mindegyike lineáris egyenlőtlenség, vagy egyenlőség, és a célfüggvény is lineáris.*

LP-feladatok néhány megoldási módszere:

- grafikus módszer (2 dimenziós esetben)
- Fourier módszer (szintén kisebb feladatoknál)
- szimplex módszer

1. Tétel. *$\mathcal{L}$ lehetséges megoldások halmaza egyenes szakaszokkal, esetleg félegyenesekkel határolt zárt konvex halmaz. Ha $\mathcal{L}$ korlátos, akkor konvex sokszög.*

3. Definíció. *Egy LP-feladat **standard alakú**, ha*

- *feltételrendszere csak $\leq$ relációkat tartalmaz*
- *a változók csak nemnegatív értékeket vehetnek fel*
- *a célfüggvény maximumát keressük.*

LP feladatok további osztályozása

- **Normál feladat**: Olyan standard alakú feladat, melyben a feltételek jobboldalán nemnegatív számok állnak.
- **Módosított normál feladat**: A feltételek jobboldalán nemnegatív számok állnak és eloforduľ benne $=$ reláció is.
- **Általános alakú feladat**: A feltételek jobboldalán nemnegatív számok állnak, és szerepel benne $\geq$ reláció is.

Szimplex-algoritmus

Szimplex tábla *normál feladat* esetén

	x_1	$\dots$	x_n	
z	$-c_1$	$\dots$	$-c_n$	0
u_1	a_{11}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_n	a_{n1}	$\dots$	a_{nn}	b_n

Műveletek szimplex táblán (redukált pivot algoritmus)

- A pivot elem helyére a reciprokát írjuk,
- A pivot elem *sorában* minden elemet *elosztunk* a pivot elemmel,
- A pivot elem *oszlopában* minden elemet *elosztunk* a pivot elemmel és vesszük az *ellentettjét*,
- A többi elemet úgy számoljuk, mint a báziscserénél (*téglalap-szabály*: pivot-elemet nem tartalmazó átlók szorzatát osztom a pivot elemmel, és ezt kivonom a negyedik csúcsnál lévő számból.)

Pivot elem választási szabályai

- Olyan oszlopban választjuk a pivot elemet ahol a *célsor eleme negatív*
- *Pozitív* számot választunk pivot elemnek
- A kiválasztott oszlop pozitív elemeivel osszuk el az utolsó oszlop megfelelő elemeit és azt a számot választjuk pivot elemnek, amelyre ez a hányados a legkisebb (*szűk keresztmetszet szabály*)

Az algoritmus véget ér

- ha a célfüggvény sorában nincs negatív elem, ekkor az optimális megoldás és a hozzátartozó célfüggvényérték a táblából kiolvasható
- ha a negatív célelemek oszlopaiban nincs pozitív elem, ilyenkor a célfüggvény a lehetséges megoldások halmazán tetszőlegesen nagy értéket felvehet
- Bizonyos esetekben végtelen ciklusra vezet az algoritmus. Az ilyen esetek akkor léphetnek fel, ha a pivot elem sorában az utolsó oszlopban 0 áll.

Módosított normál feladat megoldása:

- mesterséges kiegészítő változók
- másodlagos célfüggvény ($\bar{z} \to \min$)
- kétfázisú szimplex módszer

Általános alakú feladat megoldása:

- mesterséges kiegészítő változók
- többletváltozók
- másodlagos célfüggvény ($\bar{z} \to \min$)
- kétfázisú szimplex módszer

Hálózati folyam feladatok

Minimális **K**öltségű **H**álózati **F**olyam probléma:

- Egy régió m városában egy terméket gyártanak és árulnak.
- Minden város esetében ismert a kinálat és a kereslet különbsége b_i (ha $b_i > 0$, akkor többlet áru van).
- Feltételezzük, hogy a nettó összkereslet megegyezik a nettó összkínálattal, azaz $\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$.
- Így a nettó kínálattal rendelkező városokból az árut át kell szállítani oda ahol kereslet van.
- A városokat egy *gráf csúcsai*val szemléltetjük.
- Ahol lehetséges a két város között szállítás, oda *irányított élek*et rajzolunk.
- Az adott élen való szállítás *fajlagos költség*ét az él fölé írt számmal jelöljük.
- A mutatkozó *nettó kereslet illetve kínálat* értékét a gráf csúcsai fölé írjuk.
- Célunk, hogy a városok igényeit kielégítsük úgy, hogy a szállítási költség *minimális* legyen.
- Néha egy élen a szállításnak valamilyen korlátja van, ekkor ezt is jelöljük az élen.

A probléma modellezhető egy hálózattal ($G = (V, E)$ gráf, $c\colon E \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény):

- (i, j) élen szállítsunk x_{ij} mennyiségű árut
- LP-feladat:

$$\min z = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = b_i \qquad \forall i \in V$$

$$0 \le x_{ij} \le k_{ij} \qquad \forall (i,j) \in E$$

A feladat megoldásának menete

- keresünk egy lehetséges bázismegoldást (feszítőfa)
- folyamértékek: bázisváltozók értékei
- duál változók értékeinek meghatározása
  - elsőt szabadon választhatjuk ($y_1 := 0$)
  - többit az $y_i - y_j = c_{ij}$ képlet alapján
- nembázis változók esetén ellenőrzizzük, hogy $\bar{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij} \leq 0$
- ha igen, akkor a megoldás optimális
- ha nem, akkor alkalmazzunk hálózati szimplex transzformációt

Hálózati szimplex transzformáció

- válasszuk ki a legnagyobb $\bar{c}_{ij} \geq 0$ elemet
- ezzel az x_{ij}-hez tartozó éllel kiegészítjük a feszítőfát
- ekkor kör keletkezik: $+Q$, $-Q$ az éleken
- addig növeljük (i, j)-n a folyamot, amíg a kör egy éle ki nem esik