Halmazelméleti alapfogalmak

Halmazok

Definíció 1 ***(Halmazok uniója)*** $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Definíció 2 ***(Halmazok metszete)*** $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Definíció 3 ***(Halmazok különbsége)*** $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Definíció 4 ***(Halmaz komplementere)*** *Legyen* $A \subseteq H$*, ahol* H *az alaphalmaz.* $\bar{A} := H \setminus A$

Definíció 5 ***(Részhalmaz)*** *Részhalmaz:* $A \subseteq B$*, ha* $\forall x \in A$ *esetén* $x \in B$.
Valódi részhalmaz: $A \subset B$*, ha* $A \subseteq B$ *és* $A \neq B, A \neq \emptyset$.

Definíció 6 ***(Halmaz számossága)*** *Halmaz számossága a halmaz elemeinek száma. Jelölés:* $|A|$.

Tétel 1 ***(Részhalmazok száma, hatványhalmaz)*** *Ha* $|A| = n$*, akkor* A *részhalmazainak száma* 2^n.
Hatványhalmaz: Az A *részhalmazainak halmaza. Jelölés:* $\mathcal{P}(A) := \{H : H \subseteq A\}$.
Tehát, ha $|A| = n$*, akkor* $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Definíció 7 ***(Halmazok Descartes (direkt) szorzata)*** $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$*, ahol* (a, b) *rendezett párt jelöl. Hasonlóan definiálható kettőnén több halmazra is:* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$*. Jelölés:* $A \times A = A^2$

Relációk

Definíció 8 ***(Kétváltozós, azaz bináris vagy binér relációk))*** *A* $\varrho \subseteq A \times B$ *halmazt bináris relációnak nevezzük. A* $\varrho \subseteq A \times A$ *halmazt homogén bináris relációnak nevezzük. Ha* $(x, y) \in \varrho$*, akkor azt mondjuk hogy* x *és* y *relációban vannak a* ϱ *reláció szerint. Ezt így is szokás jelölni:* $x\varrho y$
Reláció értelmezése tartománya: $D_\varrho := \{x \in A : \exists y \in B, (x, y) \in \varrho\}$
Reláció értékkészlete: $R_\varrho := \{y \in B : \exists x \in A, (x, y) \in \varrho\}$

Definíció 9 ***(Homogén bináris relációk tulajdonságai)*** *A* $\varrho \subseteq A \times A$ *reláció*

- ***reflexív*** *, ha* $\forall x \in A : (a, a) \in \varrho$.
  Példa: Részhalmaz reláció, az "osztója" reláció.
- ***irreflexív****, ha* $\forall x \in A : (a, a) \notin \varrho$.
  Példa: A $<$ *reláció a valós számok között.*
- ***szimmetrikus****, ha* $\forall a, b \in A : (a, b) \in \varrho \iff (b, a) \in \varrho$.
  Pl: Az $=$ *reláció a valós számok között, a "kongruens" (adott modulusra) reláció az egészek között.*
- ***antiszimmetrikus****, ha* $\forall a, b \in A : ((a, b) \in \varrho \wedge (b, a) \in \varrho) \Longrightarrow a = b$.
  Példa: Részhalmaz reláció, a $\leq$ *reláció a valós számok között.*
- ***tranzitív****, ha* $((a, b) \in \varrho \wedge (b, c) \in \varrho) \Longrightarrow (a, c) \in \varrho$.
  Példa: Részhalmaz reláció, az "osztója" reláció.
- ***dichotóm****, ha* $\forall a, b \in A$ *esetén* $(a, b) \in \varrho$ *és* $(b, a) \in \varrho$ *közül legalább az egyik teljesül.*
  Példa: A $\leq$ *reláció a valós számokon.*
- ***trichotóm****, ha* $\forall a, b \in A$ *esetén* $(a, b) \in \varrho$ *és* $(b, a) \in \varrho$ *és* $a = b$ *közül pontosan az egyik teljesül.*
  Példa: A $<$ *reláció a valós számokon.*

Definíció 10 ***(Ekvivalencia reláció)*** *A* $\varrho \subseteq A \times A$ *relációt ekvivalencia relációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.*
Példa: "Kongruens" (adott modulusra) reláció.

Definíció 11 ***(Ekvivalencia osztályok)*** *Ha $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalencia reláció, akkor $H_\varrho(x) := \{y \in A : (x, y) \in \varrho\}$ $(x \in A)$ halmazokat a ϱ relációnak megfelelő ekvivalencia osztályoknak nevezzük. (Az ekvivalenciaosztályok diszjunkt halmazok, uniójuk kiadja A-t.)*
Példa: Maradékosztályok kongruenciánál.

Definíció 12 ***(Részben rendezés)*** *A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció részben rendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Az (A, ϱ) rendezett párt ekkor részben rendezett halmaznak nevezzük.*
Példa: $(\mathbb{R}, \leq)$

Definíció 13 ***(Teljes rendezés)*** *A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció teljes rendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus,tranzitív és dichotóm. Az (A, ϱ) rendezett párt ekkor (teljesen) rendezett halmaznak nevezzük.*

Definíció 14 ***(Reláció inverze)*** *A $\varrho \subseteq A \times B$ reláció inverze: $\varrho^{-1} := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in \varrho\}$*

Definíció 15 ***(Relációk szorzata)*** *A $\varrho_1 \subseteq A \times B$ és $\varrho_2 \subseteq B \times C$ relációk szorzata: $\varrho_1 \circ \varrho_2 := \{(a, c) \in A \times C : \exists b, (a, b) \in \varrho_1 \wedge (b, c) \in \varrho_2\}$*

Definíció 16 ***(Függvény (leképezés))*** *A $\varrho \subseteq A \times B$ relációt függvénynek nevezzük, ha $\forall x \in D_\varrho$ esetén pontosan egy olyan $y \in B$ van, melyre $(x, y) \in \varrho$. Ekkor y-t az x képének nevezzük, x-et pedig az y ősének.*

Definíció 17 ***(Függvények tulajdonságai)*** *A $\varrho \subseteq A \times B$ függvény*

- ***injektív***, *ha minden $y \in R_\varrho$ elemnek pontosan egy őse van.*
- ***szürjektív***, *ha $R_\varrho = B$.*
- ***bijektív***, *ha injektív és szürjektív.*