Numerikus integrálás

Kvadratúraformula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$$

ahol c_k-k a kvadratúraformula súlyai. Mivel

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

ezért elég az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumokon közelítő formulát adni.

Elemi kvadratúraformulák

1. **Téglalapformula**
   Az f görbe alatti területet téglalap területével közelítjük. A téglalap magasságának az intervallum felénél lévő függvényértéket választjuk. Egyszerű téglalapformula:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h \cdot f(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

   Összetett téglalapformula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot [f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + \cdots + f(x_{n-\frac{1}{2}})] = h \cdot \sum_{i=0}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

2. **Trapézformula**
   A görbe alatti területet trapéz területével közelítjük. Egyszerű:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

   Összetett:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = h \cdot [\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

3. **Simpson formula**
   Az $f(x)$ függvényt az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az $f(x_{i-1}), f(x_{i-\frac{1}{2}}), f(x_i)$ pontokon átmenő parabolával helyettesítjük. Ez másodfokú Lagrange interpolációs polinom.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6} \cdot [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)]$$

Interpolációs kvadratúraformulák

Az f integrálja helyett egy interpolált függvény határozott integrálját számítjuk ki.
Legyenek $[a, b]$-ben az alappontok $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ és $f(x)$-et interpoláljuk a Lagrange interpolációs polinommal. Ekkor $f(x) = L_n(f, x) + H_n(f, x)$, ahol $H_n(f, x)$ a hibatag. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(f, x)dx + \int_a^b H_n(f, x)dx$$

Ha a hibaintegrál kicsi, akkor f integrálja helyett L_n integrálját számolhatjuk. Mivel

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x)$$

ahol

$$l_k(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

ezért

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \int_a^b l_k(x)$$

Ha

$$A_k = \int_a^b l_k(x)$$

akkor

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot A_k$$

Ez utóbbit nyílt Newton-Cotes formulának is szokták nevezni.

Zárt Newton-Cotes formulák

Newton-Cotes együtthatók:

$$B_k := \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k! \cdot (n-k)!} \int_a^b t(t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n)dt$$

Tulajdonságok:

$$\sum_{k=0}^{n} B_k = 1$$
$$B_k = B_{n-k}$$

Ezekkel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot B_k$$

- Ha $n = 1 \Longrightarrow B_0 = B_1 = \frac{1}{2}$, Trapézformula
- Ha $n = 2 \Longrightarrow B_0 = B_2 = \frac{1}{6}, B_1 = \frac{2}{3}$, Simpson formula

Ortogonális polinomok

Definíció 1 ***(Súlyfüggvény)***
Az integrálhato $\varrho(x) \geq 0$ függvényt súlyfüggvénynek nevezzük $[a, b]$-n, ha annak egyetlen részintervallumán sem azonosan nulla.

Definíció 2 ***(Skaláris szorzat az integrálható függvények terén)***
Az $[a, b]$-n integrálható f és g függvények skaláris szorzata a $\varrho(x)$ súlyfüggvényre nézve:

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b \varrho(x)f(x)g(x)dx$$

Definíció 3 ***(Ortogonális függvények)***
Az f és g függvények ortogonálisak a $\varrho(x)$ súlyfüggvényre nézve, ha

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b \varrho(x)f(x)g(x)dx = 0$$

Definíció 4 ***(Ortogonális függvényhalmaz)***
A $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ függvények ortogonális függvényhalmazt alkotnak, ha

$$\langle \phi_i, \phi_j\rangle = \begin{cases} 0 & ha \quad i \neq j \\ \alpha_i & ha \quad i = j \end{cases}$$

Gauss típusú kvadratúraformulák

Láttuk, hogy az n-edfokú interpolációs kvadratúraformula pontos minden legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomra az alappontok tetszőleges megválasztása esetén.
Kérdés: Az alappontok alkalmas megválasztásával az interpolációs kvadratúraformula pontossá tehető-e magasabb fokszámú polinomokra is?
Legyen $\varrho(x) \geq 0$ súlyfüggvény $[a,b]$-n és $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset [a,b]$ alappontok.

$$\int_a^b \varrho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$A_k = \int_a^b \varrho(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$$