Numerikus sorozatok tulajdonságai, konvergencia, nevezetes példák

Definíció 1 *(Sorozat)*
Sorozaton olyan függvényt értünk, melynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok (esetleg a természetes számok) halmaza. Ha a függvényértékek valós számok, akkor valós számsorozatról beszélünk.

Jelölés, példa (a sorozat n-edik tagja):

$$a_n = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^+$$

Definíció 2 *(Korlátos sorozatok)*
Az (a_n) sorozat felülről korlátos ha $\exists K \in \mathbb{R}, a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor K a sorozat egy felső korlátja.
Az (a_n) sorozat alulról korlátos ha $\exists k \in \mathbb{R}, a_n \geq k \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor k a sorozat egy alsó korlátja.
Ha egy sorozat felülről és alulról is korlátos, akkor korlátos.

Példa: Az $a_n = \frac{n}{n+1}$ sorozat korlátos. Például $K = 1$ és $k = 0$.

Definíció 3 *(Monoton sorozatok)*
Az (a_n) sorozat szigorúan monoton növekvő, ha $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.
Az (a_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.
Az (a_n) sorozat monoton növekvő, ha $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.
Az (a_n) sorozat monoton csökkenő, ha $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.

Példa: Az $a_n = \frac{n}{n+1}$ sorozat szigorúan monoton növekvő.

Definíció 4 *(Sorozat határértéke, konvergens sorozatok)*
Az (a_n) sorozat konvergens és határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

Jelölés:

$$a_n \to A \quad vagy \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A$$

Példa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Az előbbi definícióval ekvivalens: Az (a_n) sorozat A-hoz konvergál, ha az A bármely környezetéből a sorozatnak csak véges sok tagja marad ki.
Ha egy sorozat nem konvergens (semelyik A-hoz sem konvergál), akkor azt divergensnek nevezzük.

Tétel 1 *Egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.*

Tétel 2 *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Tétel 3 *Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.*

Definíció 5 *(Valódi divergens sorozatok, azaz a végtelen, mint határérték)*
Az (a_n) sorozat a végtelenhez divergál (végtelenhez tart), ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik olyan N küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $a_n > K$.
Hasonlóan lehet definiálni a negatív végtelenhez divergáló sorozatokat.

Jelölés:

$$a_n \to \infty \quad vagy \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Példa:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

Tétel 4 ***(Reciprok sorozat)***
Ha $a_n \to \infty$*, akkor* $\frac{1}{a_n} \to 0$*.*
Ha $a_n \to \ 0$ *és* $a_n > 0$*, akkor* $\frac{1}{a_n} \to \infty$*.*

Tétel 5 ***(Műveletek konvergens sorozatokkal)***
Ha $a_n \to A$ *és* $b_n \to B$ $(A, B \in \mathbb{R})$ *akkor:*

- $c \cdot a_n \to c \cdot A$*, ahol* $c \in \mathbb{R}$
- $a_n + b_n \to A + B$
- $a_n - b_n \to A - B$
- $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$*, ha* $B \neq 0$
- ${a_n}^k \to A^k$
- $\sqrt[k]{a}_n \to \sqrt[k]{A}$

Tétel 6 *Ha* $a_n \to 0$ *és* b_n *korlátos, akkor* $a_n \cdot b_n \to 0$*.*

Tétel 7 ***(Rendőr-elv)***
Ha $a_n \to A$ *és* $b_n \to A$ *és* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *egy küszöbindextől kezdve, akkor* $c_n \to A$*.*

Tétel 8 ***(Bolzano-Weierstrass)***
Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Tétel 9 ***(Cauchy-féle konvergencia kritérium)***
Az (a_n) *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha bármely* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *számhoz létezik olyan* N *küszöbindex, hogy* $\forall n, m > N$ *esetén* $|a_n - a_m| < \varepsilon$*.*

Néhány nevezetes sorozat és határértéke

- $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$ és $q^n \to \infty$, ha $q > 1$
- $\sqrt[n]{n} \to 1$
- $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$
- $(1 + \frac{k}{n})^n \to e^k$
- $\frac{a^n}{n!} \to 0$