Iterációs módszerek

Definíció 1 ***(Fixpont)***
A ϕ függvény (leképezés) fixpontja x^*, ha $\phi(x^*) = x^*$.

Definíció 2 ***(Kontrakció)***
A ϕ leképezés kontrakció, ha $\exists\kappa \quad 0 < \kappa < 1$, hogy $\forall x, y$ esetén

$$||\phi(x) - \phi(y)|| < \kappa||x - y||$$

Definíció 3 ***(Banach féle fixpont tétel)***
Ha ϕ leképezés kontrakció (egy Banach-térben), akkor van fixpontja.

LER iterációs megoldásai

A LER iterációs megoldása főleg akkor hasznos, ha A ritka és nagyméretű mátrix. Az $A\underline{x} = \underline{b}$-et először a vele ekvivalens

$$\underline{x} = C\underline{x} + \underline{c}$$

alakra hozzuk. Ez az úgynevezett fixpont egyenlet. Ez

$$\underline{x} = \phi(\underline{x})$$

alakú, ahol

$$\phi(\underline{x}) = C\underline{x} + \underline{c}$$

Az iteráció elve:
Kiindulunk egy tetszőleges $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ kezdővektorból, képezzük az

$$\underline{x}_{k+1} = C\underline{x}_k + \underline{c}$$

közelítő megoldások sorozatát. Ha az $\underline{x}_k$ sorozat konvergens, akkor a

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$$

az eredeti egyenletnek is megoldása lesz.
Kérdések:

- Milyen feltételek biztosítják, hogy tetszőleges $\underline{x}_0$-ból kiindulva az $\underline{x}_k$ sorozat konvergens? (Konvergencia kérdése)
  Válasz: Akkor és csak akkor konvergens, ha $\varrho(C) < 1$. (A fenti C mátrix spektrálsugara 1-nél kisebb legyen)
- Hogyan becsülhető a közelítő $\underline{x}_k$ megoldások hibája? (Hibabecslés)
- Milyen gyors a konvergencia? (Konvergencia sebesség)

Jacobi iteráció

Legyen $A\underline{x} = \underline{b}$ formában adott LER, $\det A \neq 0$. Bontsuk fel A-t a következő módon:

$$A = L + D + R$$

ahol L az A főátló alatti részét tartalmazza, egyéb helyeken csupa nulla, D az A főátlóját tartalmazza (diagonális mátrix), egyéb helyeken csupa nulla, R az A főátló feletti részét tartalmazza, egyéb helyeken csupa nulla. Ekkor

$$(L + D + R)\underline{x} = \underline{b}$$

Átrendezve:

$$D\underline{x} = -(L + R)\underline{x} + \underline{b}$$

D inverzével (van neki!) beszorozva jobbról:

$$\underline{x} = -D^{-1}(L+R)\underline{x} + D^{-1}\underline{b}$$

Most

$$C := -D^{-1}(L+R), \quad \underline{c} := D^{-1}\underline{b}$$

Így tetszőleges $\underline{x_0}$-ból kiindulva a Jacobi iteráció:

$$\underline{x}_k = -D^{-1}(L+R)\underline{x}_{k-1} + D^{-1}\underline{b}$$

Konvergencia kritérium:

$$\varrho(-D^{-1}(L+R)) < 1$$

Gauss-Seidel iteráció

A Jacobi iterációt megvizsgálva látjuk, hogy a k-adik iterált vektor i-edik koordinátájának kiszámításához már felhasználtuk az előző $1, 2, \ldots, i-1$ koordinátáit a k-adik iteráltnak. Ebből adódik a Gauss-Seidel iteráció:

$$\underline{x}_k = D^{-1}(-L\underline{x}_k - R\underline{x}_{k-1}) + D^{-1}\underline{b}$$

Átrendezve:

$$\underline{x}_k = -(D+L)^{-1}R\underline{x}_{k-1} + (D+L)^{-1}\underline{b}$$

Konvergencia kritérium:

$$\varrho(-(D+L)^{-1}R) < 1$$

Nemlineáris egyenletek iterációs megoldási módszerei

Keressük az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását (gyökét), azaz olyan x^* számot, melyre $f(x^*) = 0$. Az egyenletet írjuk át

$$x = \phi(x)$$

alakra. Ez a fixpontegyenlet. Ha x^* fixpontja ϕ-nek, akkor az eredeti egyenletnek is megoldása. Képezzük a közelítő megoldások sorozatát:

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

Kérdések:

1. Hogyan válasszunk alkalmas ϕ iterációs függvényt?
2. Milyen feltételek mellett konvergál az x_k közelítő megoldások sorozata?
3. Milyen gyors a konvergencia?
4. Az x_0 kezdőértéket hogyan kell megválasztani?

Definíció 4 *Azt mondjuk, hogy az x_k iterációs sorozat konvergens, ha*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

ahol x^* megoldása a fixpont egyenletnek és az eredeti egyenletnek is.

A Bolzano-tétel szerint, ha egy zárt intervallumon folytonos függvény az intervallum végpontjaiban ellentétes előjelű, akkor biztosan van zérushelye az intervallumban. Azaz a megfelelő egyenletnek biztosan van megoldása (gyöke).

Intervallumfelezéses módszer (Bolzano féle)

Ha f az $[a,b]$-n folytonos függvény és $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelű, akkor a és b között van gyök. Legyen

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

Ezután x_k-t hasonlóan képezzük, az $f(x_{k-1})$ előjele alapján valamelyik részintervallumot tovább felezzük. Az x_k sorozat f egy zérushelyéhez tart.

Húr módszer

Ha f az $[a,b]$-n folytonos függvény és $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelű, akkor a és b között van gyök. Behúzzuk az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húrt. Ahol ez metszi az x tengelyt ott lesz az első, x_0 iterációs pont. Ezután az eljárást folytatjuk $f(x_{k-1})$ előjele alapján újabb húrt húzunk be, abból kapjuk x_k-t.

Newton (érintő) módszer

Legyen f az $[a,b]$ folytonos és differenciálható függvény. Keressük az

$$f(x) = 0$$

megoldását az $[a,b]$-n. Ekkor az iteráció:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Szelő módszer

A Newton módszerhez képest annyit változtatunk, hogy a derivált helyett a különbségi hányadossal számolunk.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Két kezdőérték van: x_0, x_1