Elsőrendű explicit differenciálegyenletek

Keressük azt $y(x)$ differenciálható függvényt, amelyre

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

egyenlet teljesül (differenciálegyenlet) az

$$y(x_0) = x_0$$

kezdeti feltétel mellett. (Ezt nevezik kezdeti érték problémának.)

Definíció 1 ***(Lipschitz feltétel)***
Az f függvény a második változójában teljesíti a Lipschitz feltételt, ha minden K kompakt halmazhoz létezik $L > 0$, melyre

$$||f(x, y_1) - f(x, y_2)|| < L \cdot ||y_1 - y_2|| \quad \forall y_1, y_2 \in K$$

Tétel 1 ***(Fokozatos közelítés módszere (Szukcesszív approximáció))***
Ha az f függvény a második változójában kielégíti a Lipschitz feltételt, akkor a

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti értékes diff. egyenletnek létezik megoldása és az

$$y_0(x) := y_0$$

$$y_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál a megoldáshoz.

Taylor-sor közelítés

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y(x_0) = y_0$$

A megoldás Taylor sorát közelítjük az $y^{(k)}(x_0)$ értékek meghatározásával.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Az $y^{(k)}(x_0)$ értékeket a differenciálegyenletből határozzuk meg. Első derivált azonnal adódik, a többi pedig a diff. egyenlet egy vagy többszöri deriválásával kihozható:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Az eredeti diff. egyenletet deriválva kapjuk (teljes differenciál):

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot y'(x)$$

Ebbe behelyettesítve az $x_0, y_0, y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ értékeket:

$$y''(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot f(x_0, y_0)$$

Ezt folytatva megkapható a többi derivált is . . .

Euler módszer

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

Egylépéses Euler

Az $[x_0, x]$ intervallumot felosztuk n egyenlő részre.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(t)dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(t))dt$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(t))dt$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(t))dt$$

A derivált közelítésére a differenciahányadost használjuk. Az integrált közelítsük téglalapformulával:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h \cdot f(x_i, y(x_i))$$

$$y_i := y(x_i)$$

$$y_0 := y(x_0)$$

$$y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y(x_i))$$

(Explicit Euler módszer)

Többlépéses Euler

Az integrált Simpson-formulával közelítjük.

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} y'(t)dt = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x,y(t))dt$$

$$y(x_{i+2}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x,y(t))dt$$

$$y(x_{i+2}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x,y(t))dt$$

$$y_{i+2} := y_i + \frac{h}{3} f(x_i, y_i) + \frac{4h}{3} f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2})$$

Másodrendű rekurzió, az elején két kezdőértéket kell megadni, y_1-et az egylépéses Euler módszerből kapjuk.

Implicit Euler módszer

A derivált közelítésére a differenciahányadost használjuk.

$$y'(x_{i+1}) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

$$y'(x_{i+1}) = f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

Átrendezve:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h \cdot f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

Runge-Kutta módszerek

Feladat: Konstruáljunk p-edrendű ($p \geq 1$, egész) numerikus módszert a

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiértékes differenciálegyenletre az f *deriváltjainak kiszámítása nélkül.*
Negyedrendű Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

ahol

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$
$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$