24. tétel: Lineáris programozási feladatok dualitása. Farkas tétel, Farkas lemma.

Dualitás

$(P)LP \Leftrightarrow$LP (D)

1. Néha könnyebb a duál feladatot megoldani, mint a (P) feladatot.

2. Egy lehetséges megoldásnál a duál feladaton keresztül el tudjuk dönteni, hogy optimális-e vagy nem.

3. Fontos gazdasági jelentése van a duál feladatnak.

Definíció: Egy standard alakú LP feladat duálja.
(P) max z =cx
Ax $\leq b$
$x \geq \ominus n$
$A \in M^{m*n}$
$b \in R^m$
$c \in R^n, x \in R^n$

(D)
min w= yb
yA$\geq c$
$y \geq \ominus m$

Tétel: A (P) primál feladat duáljának (D) duálja a (P) primál feladat.
Következmény: Minden primál feladat egyértelműen meghatároz egy (P)-(D) primál duál párt.

	(P) primál LP	Duál LP feladat
célfüggvény	max	min
	feltételei: $\leq b_i, = b_i, \geq b_i$	változói: $y_i \geq 0, y_i$ előjelkötetlen, $y_i \leq 0$
	változói: $x_i \geq 0, x_i$ előjelkötetlen, $x_i \leq 0$	feltételei: $\geq c_i, = c_i, \leq c_i$

Dualitási tételek

1. Gyenge dualitási tétel $\forall x \in L^{(P)}, \forall y \in^{(D)}$
   $cx \leq yb$
   $z(x) \leq w(y)$

Következmény: Ha $x^* \in L^{(P)}$ és $y^* \in L^{(D)}$ valamint $cx^* = y^*b \Longrightarrow$
$x^*(P)$ optimális megoldása
$y^*(D)$ optimális megoldása

2. **Erős dualitási tétel**

   - Ha a (P) feladatnak van optimális megoldása, akkor a (D) duáljának is van megoldása, és cx=yb

- Ha a (P)-(D) primál -duál pár valalmelyikének célfüggvénye nem korlátos $\Rightarrow$ másik feladat lehetséges pontok halmaza üres (L=$\oslash$).
  Megjegyzés: Nem megfordítható az előbbi pont.
  $\exists(P)-(D)$ primál - duál pár hogy $L^p = L^D = \oslash$

Optimális szimplex tábla:

	x_N	
z	$C_B B^{-1} - C_N$	$C_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1} N X_N$	$B^{-1} b$

z$^* = C_B B^{-1} b$
$C_B B^{-1} N - C_N \geq \ominus n$
B$^{-1} b \geq \ominus m \Longrightarrow$ ha a 3 feltétel teljesül, akkor optimális a tábla
Állítás: y=y* $optimlismegolds.$

Komplementaritás tétel

$x \in L^{(P)}, y \in L^{(D)}$ ahol $(P)-(D)$ egy primál-duál pár, akkor x, y optimális megoldás$\Longleftrightarrow (yA - c)x = 0$ azaz $y(Ax - b) = 0$

Farkas-lemma

$yA = c$ van $y \geq \ominus m$ megoldása $\Longleftrightarrow c\bar{x} \geq 0 \forall$ olyan $\bar{x} \in R^n$-re, melyre $A\bar{x} \geq \ominus m$.
Bebizonyítható, hogy a dualitási tétel ekvivalens a Farkas lemmával.

Duál feladat optimális megoldásának leolvasása

	$L^D = \oslash$	L$^D \neq \oslash$
$L^P = \oslash$	ilyen $\exists$	$w(y) = yb$ nem korlátos alulról
$L^P \neq \oslash$	$z(x) = cx$ nem korl.felülről	$\exists x^* \in L^P, y^* \in L^D opt.mo.z(x^*) = w(y^*), cx^* = y^* b$

Duál-szimplex módszer

(P)
$z = cx \rightarrow min$
Ax $\geq b$
$c, x \geq \ominus n$
$b \geq \ominus m \; -Ax + Eu = -b$

(D)
$w = yd \rightarrow max \; yA \leq c$
$y \geq \ominus m \; c \geq \ominus n$

Pivot elem választása

1. $a_{kr} < 0$
2. Olyan sorban választunk pivot elemet, ahol a jobb oldal negatív (szélső jobb).
3. $\frac{c_r}{a_{kr}} = min \frac{c_i}{a_{ki}}, 1 < i < n, a_{ki} < 0$

- Optimális a tábla, ha a "b" oszlopában $\forall$ elem nem negatív.
- Ha $\exists b_k < 0$, de nincs sorában negatív szám, akkor a célfüggvény nem korlátos $\Rightarrow L^P = \oslash$.