Differenciálszámítás és alkalmazásai. (Egy és többváltozós esetben)

Definíció 1 ***(Differenciahányados függvény)***
Legyen $f(x)$ egy függvény, az a pedig a D_f egy belső pontja. A

$$d_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad x \in D_f \setminus \{a\}$$

függvényt az a helyhez tartozó differenciahányados függvénynek nevezzük.
Az $f(x)$ grafikonjának $(a, f(a))$ és $(x, f(x))$ pontjain átmenő szelő meredekségét adja meg.

Definíció 2 ***(Differenciálhányados, differenciálhatóság egy adott helyen)***
Ha a az $f(x)$ értelmezési tartományának egy belső pontja és a $d_a(x)$ differenciahányados függvénynek az a helyen létezik véges határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f(x) differenciálható az a helyen és a $\lim_{x\to a} d_a(x)$ számot az f(x) függvény a-beli differenciálhányadosának nevezzük és $f'(a)$-val jelöljük.
Az $f'(a)$ a grafikon $(a, f(a))$ pontbeli érintőjének meredekségét adja meg.

Definíció 3 ***(Differenciálható (deriválható) függvény)***
Legyen H az $f(x)$ függvény D_f értelmezési tartományának nyílt, nem üres részhalmaza. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ differenciálható a H halmazon, ha $f(x)$ differenciálható a H minden pontjában. Ha $H = D_f$, akkor röviden differenciálható függvényről beszélünk.

Definíció 4 ***(Differenciálhányados függvény, derivált)***
Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény a D_f minden belső pontját tartalmazó H halmazon differenciálható. Azt a függvényt, amely a H halmaz minden pontjához az $f(x)$ adott pontbeli differenciálhányadosát rendeli hozzá, az $f(x)$ differenciálhányados függvényének, röviden deriváltjának nevezzük. Jele: $f'(x)$.

Tétel 1 ***(Differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata)***
Ha az $f(x)$ differenciálható az x_0 helyen, akkor ott folytonos is.
Ha az $f(x)$ folytonos az x_0 helyen, abból nem következik, hogy differenciálható is ott. Pl. $f(x) = |x|$ a 0-ban.

Deriválási szabályok
Ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható függvények, akkor

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f \cdot g'(x)$$
$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Inverz függvény deriváltja

$$(f^{-1}(x)))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Elemi függvények deriváltja (táblázatból összegyűjthető).

Tétel 2 ***(Derivált és monotonitás, szélsőérték, konvexitás)***
Ha az $f(x)$ az $[a, b]$-n deriválható és $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0$, akkor $f(x)$ az $[a, b]$-n szig. mon. nő.
Ha az $f(x)$ az $[a, b]$-n deriválható és $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < 0$, akkor $f(x)$ az $[a, b]$-n szig. mon. csökken.
Ha $f(x)$-nek az x_0-ban lokális szélsőértéke van és ott deriválható, akkor $f'(x_0) = 0$.
Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor $f(x)$-nek x_0-ban lokális minimuma van.
Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor $f(x)$-nek x_0-ban lokális maximuma van.
Ha az $f(x)$ az $[a, b]$-n kétszer deriválható és $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) > 0$, akkor $f(x)$ az $[a, b]$-n konvex.
Ha az $f(x)$ az $[a, b]$-n kétszer deriválható és $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) < 0$, akkor $f(x)$ az $[a, b]$-n konkáv.
Ha $f''(x_0) = 0$ és $f''(x)$ az x_0-ban előjelet vált, akkor $f(x)$-nek x_0-ban inflexiós pontja van.

Tétel 3 ***(Lagrange-féle középértéktétel)***
Ha f az $[a,b]$-n folytonos, az (a,b)-n deriválható, akkor $\exists c \in (a,b)$, melyre $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Spec. eset (Rolle tétel): Ha f az $[a,b]$-n folytonos, $(a,b$-n deriválható és $f(a) = f(b)$, akkor $\exists c \in (a,b)$, melyre $f'(c) = 0$.

Alkalmazási területek: Érintő egyenletének meghatározása egy függvényhez adott pontban, szélsőértékfeladatok, függvényvizsgálat (monotonitás, konvexitás).
Példa a fizikából: Az elmozdulás idő szerinti deriváltja a sebesség, a sebesség idő szerinti deriváltja a gyorsulás.