Lineáris egyenletrendszerek (LER) megoldása

(lásd még a 20. tételnél)

Definíció 1 ***(Lineáris egyenletrendszer)***
Legyen $A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *adott együtthatómátrix,* $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ *ismeretlen vektor,* $\underline{b} \in \mathbb{R}^N$ *adott vektor. Ezekkel mátrix alakban felírt lineáris egyenletrendszer:*

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Direkt módszerek

Tétel 1 ***(Cramer szabály)***
Ha $\det A \neq 0$*, akkor*

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A} \quad k = 1, \dots, N$$

ahol az A_k *mátrixot úgy kapjuk, hogy az* A *mátrix* k*-adik oszlopát* $\underline{b}$*-re cseréljük.*

Tétel 2 ***(Homogén LER-nek mikor van nem triviális megoldása)***
Az $A\underline{x} = \underline{0}$*-nak akkor és csak akkor létezik* $\underline{x} \neq \underline{0}$ *megoldása, ha* $\det A = 0$.

Tétel 3 ***(Inhomogén LER-nek mikor van egyértelmű megoldása)***
Az $A\underline{x} = \underline{b}$*-nek akkor és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha* $\det A \neq 0$.

Definíció 2 ***(Direkt módszer LER megoldására)***
Pontos adatokat feltételezve, a számításokat pontosan elvégezve, véges sok lépésben a pontos eredmény meghatározható a bemenő A *és* $\underline{b}$ *adatokból.*

Gauss elimináció, Gauss-Jordan elimináció

Az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldási módszere elsősorban $\det A \neq 0, \quad \underline{b} \neq \underline{0}$ (egyértelmű megoldás) mellett.
Az $A|\underline{b} \in \mathbb{R}^{N\times(N+1)}$ kiegészített mátrixon végzünk sorműveleteket, míg nem alakul ki felső trianguláris mátrix. Abból a megoldások visszahelyettesítéssel könnyen leolvashatók. (Sőt egyértelmű megoldás létezése esetén elérhető, hogy az A mátrix helyén az egységmátrix legyen és ekkor a megoldások egyszerűen leolvashatók a kiegészített mátrix utolsó oszlopából. Ezt nevezzük Gauss-Jordan eliminációnak. A Gauss-Jordan elimináció tehát a Gauss elimináció továbbfejlesztése azáltal, hogy a felső háromszogmátrixot tovább alakítjuk diagonális mátrixá.) Megengedett sorműveletek:

- Két sor cseréje
- Egy sor szorzása tetszőleges, nem nulla számmal
- Egy sorhoz egy másik sor nem nulla számszorosának hozzáadása

A Gauss elimináció műveletigénye $\frac{1}{3}N^3$-es. A Gauss-Jordan műveletigénye $\frac{1}{2}N^3$-es.

LU felbontás (Trianguláris felbontás)

Legyen $A\underline{x} = \underline{b}$, $\det A \neq 0$. Bontsuk fel az A mátrixot két háromszögmátrix szorzatára:

$$A = L \cdot U$$

ahol L egy alsó háromszögmátrix (főátlóban csupa 1-esekkel), U pedig egy felső háromszögmátrix. Ekkor

$$A\underline{x} = L \cdot U\underline{x} = \underline{b}$$

Legyen

$$U\underline{x} = \underline{y}$$

Így L és U ismeretében egymás után két LER-t kell megoldani. Először:

$$L\underline{y} = \underline{b}$$

Majd:

$$U\underline{x} = \underline{y}$$

A fő feladat L és U kiszámítása. Az erre vonatkozó összefüggések az $A = L \cdot U$ mátrixszorzásból felírhatók.

Tétel 4 *(LU **felbontás egyértelműsége**)*
Ha $\det A \neq 0$ *és létezik LU felbontás, akkor az LU felbontás egyértelmű.*

Az LU felbontásos megoldás műveletigénye $\frac{1}{3}N^3$-es. Ebből az LU felbontásé $\frac{1}{6}N^3$-es.

QR felbontás

Bontsuk fel az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer A mátrixát egy Q ortogonális mátrix és egy R felső háromszögmátrix szorzatára: $A = Q \cdot R$. (Q-t ortogonálisnak nevezzük, ha $Q^{-1} = Q^T$). Ekkor $A\underline{x} = \underline{b}$ helyett az

$$Q\underline{y} = \underline{b}$$

$$R\underline{x} = \underline{y}$$

egyenletrendszereket oldjuk meg.

Lineáris legkisebb négyzetek módszere (lineáris regresszió)

Adottak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alappontok és a hozzájuk tartozó $y_1, y_2, \ldots, y_n$ értékek (mérési adatok).
Az x és y értékei között lineáris kapcsolatot tételezünk fel:

$$y = ax + b$$

A feladat a mért értékekből meghatározni (megbecsülni) a lineáris függés paramétereit, a-t és b-t.
Az eljárás lényege, hogy olyan a-t és b-t keresünk, melyre az

$$S(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

összeg minimális.
Az $S(a,b)$ az a,b paramétereknek kétváltozós függvénye. Az $S(a,b)$ szélsőértékének szükséges feltétele:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

A parciális deriválásokat elvégezve a, b-re kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer adódik, amely megoldásával kapjuk a-t és b-t.