Diszkrét és folytonos valószínűségi változók. Függetlenség fogalma. Várható érték, szórás, korreláció. Nagy számok törvénye. Centrális határeloszlás tétel.

Definíció 1 *(**Valószínűségi mező**) Valószínűségi mezőnek nevezzük a $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast, ahol*

- *Ω az eseménytér, az elemi események halmaza.*
- *$\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak (az eseményeknek) olyan halmaza, melyre*
  1. *$\Omega \in \mathcal{A}$*
  2. *Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\bar{A} \in \mathcal{A}$ (komplementer vagy ellentett esemény)*
  3. *Ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor $A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{A}$ (események uniója vagy összege)*
- *$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ nemnegatív leképezést valószínűségnek nevezzük, melyre*
  1. *$P(\Omega) = 1$*
  2. *Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A \cup B) = P(A) + B(B)$ (egymást kizáró események valószínűsége összeadódik)*
  3. *Ha $A_1, A_2, \dots$ egymást kizáró események (azaz $A_i \cap A_j = \emptyset$), akkor $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$*

Néhány fogalom, tulajdonság

- Ω: biztos esemény
- $\emptyset$: lehetetlen esemény
- Események összege (uniója): Akkor következik be, ha legalább az egyik esemény bekövetkezik. $P(A + B)$ vagy $P(A \cup B)$
- Események szorzata (metszete): Akkor következik be, ha mindegyik esemény bekövetkezik. $P(AB)$ vagy $P(A \cap B)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$
- Ha $A \subseteq B$, akkor $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Klasszikus valószínűségi mező: Az elemi események száma véges és valószínűségük megegyezik. (Pl. kockadobás)
- Klasszikus valószínűség: Kedvező esetek száma / Összes eset száma, $P(A) = \frac{k}{n}$
- Teljes eseményrendszer: $A_1, A_2, \dots$, ahol $A_i \cap A_j = \emptyset$ (páronként kizárók) és $\cup A_i = \Omega$. Ekkor $\sum P(A_i) = 1$.

Definíció 2 *(**Valószínűségi változó**) A $\xi : \Omega \to R$ leképezést valószínűségi változónak nevezzük, ha*

$$\{\xi < x\} = \{\omega : \omega \in \Omega, \xi(\omega) < x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Az elemi eseményekhez számokat rendelünk)

Definíció 3 *(**Diszkrét valószínűségi változó**) A $\xi : \Omega \to R$ valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen.*
Ha a ξ diszkrét val. változó lehetséges értékeinek sorozata $x_1, x_2, \dots$, akkor a $p_i = P(\xi = x_i)$ valószínűségek sorozatát a ξ eloszlásának nevezzük.

Definíció 4 ***(Eloszlásfüggvény)*** *Az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = P(\xi < x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.*

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ monoton növekvő
- $F(x)$ balról folytonos
- $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$
- $P(\xi \geq x) = 1 - F(x)$
- $0 \leq F(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Definíció 5 ***(Sűrűségfüggvény)*** *Legyen F a ξ val. változó eloszlásfüggvénye. Ha létezik f nemnegatív valós függvény, melyre*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

akkor f-et a ξ val. változó sűrűségfüggvényének nevezzük.

Definíció 6 ***(Folytonos eloszlású val. változó)*** *A ξ val. változót folytonosnak nevezzük, ha létezik sűrűségfüggvénye.*

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

- $f(x) \geq 0$
- $F'(x) = f(x)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$
- $P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x)dx$

Definíció 7 ***(Várható érték)***
Ha ξ diszkrét: $E(\xi) = \sum p_i x_i$
Ha ξ folytonos: $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

Definíció 8 ***(Szórásnégyzet)***
$D^2(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$
Ha ξ diszkrét: $D^2(\xi) = \sum p_i x_i^2 - (\sum p_i x_i)^2$
Ha ξ folytonos: $D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx)^2$

Definíció 9 ***(Feltételes valószínűség)*** *Legyen B olyan esemény, melyre $P(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B esemény melletti $P(A|B)$ feltételes valószínűsége szemléletesen az A esemény bekövetkezésének valószínűségét jelenti, feltéve hogy a B esemény bekövetkezett. Definíció szerint:*

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ebből a szorzat esemény valószínűsége:

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

Tétel 1 ***(Teljes valószínűség tétele)***
Ha $B_1, B_2, \ldots$ *teljes eseményrendszert alkotnak és* $P(B_i) \neq 0$, *akkor*

$$P(A) = \sum P(A|B_i)P(B_i)$$

Tétel 2 ***(Bayes tétel)***
Ha $B_1, B_2, \ldots$ *teljes eseményrendszert alkotnak és* $P(B_i) \neq 0$ *és* $P(A) \neq 0$, *akkor*

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum P(A|B_i)P(B_i)}$$

Definíció 10 ***(Események függetlensége)***
Az A *és* B *eseményeket függetlennek nevezzük, ha*

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Másképpen:

$$P(A|B) = P(A)$$

Az $A_1, A2, \ldots$ *események teljesen függetlenek, ha bárhogyan választunk ki közülük* k *darabot, azokra*

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

Definíció 11 ***(Együttes eloszlásfüggvény, peremeloszlásfüggvény)*** *A* ξ, η *val. változók együttes eloszlásfüggvénye:*

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$$

Az

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y), \quad F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F(x, y)$$

függvényeket peremeloszlásfüggvényeknek nevezzük.

Definíció 12 ***(Valószínűségi változók függetlensége)*** *A* ξ, η *val. változókat függetlennek nevezzük, ha*

$$F(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Definíció 13 ***(Kovariancia)***

$$cov(\xi, \eta) := E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta)))$$

Definíció 14 ***(Korrelációs együttható)***

$$r(\xi, \eta) := \frac{cov(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)}$$

Megj: $|r(\xi, \eta)| \leq 1$. Viselkedése hasonlít a cosinus függvényéhez. $|r(\xi, \eta)| = 1 \Longleftrightarrow \xi = a\eta$

Tétel 3

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \cdots + E(\xi_n)$$

Tétel 4 *Ha* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *független val. változók, akkor*

$$D^2(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \cdots + D^2(\xi_n)$$

Néhány nevezetes diszkrét eloszlás

1. Binomiális eloszlás

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(\xi) = np$$

$$D^2(\xi) = np(1-p)$$

2. Poisson eloszlás

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(\xi) = \lambda$$

$$D^2(\xi) = \lambda$$

Néhány nevezetes folytonos eloszlás

1. Egyenletes eloszlás

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a < x \leq b$$

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(\xi) = \frac{b-a}{12}$$

2. Exponenciális eloszlás

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

3. Normális eloszlás

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(\xi) = \mu$$

$$D(\xi) = \sigma$$

   Standard normális eloszlás

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$E(\xi) = 0$$

$$D(\xi) = 1$$

   Eloszlásfüggvénye $\Phi(x)$, táblázattal adják meg. Egy (μ, σ) normális eloszlás eloszlásfüggvénye ezzel: $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

Nagy számok törvénye

Tétel 5 ***(Csebisev egyenlőtlenség)***

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Tétel 6 ***(Nagy számok gyenge törvénye)*** *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású val. változók, $E(\xi_i) = \mu$. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

Tétel 7 ***(Centrális határeloszlás tétel)*** *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású val. változók, $E(\xi_i) = \mu$, $D^2(\xi_i) = \sigma^2 > 0$. Ha $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x) = \Phi(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.