Integrálszámítás és alkalmazásai. (Egy és többváltozós esetben)

Határozatlan integrál

Definíció 1 ***(Primitív függvény)***
Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f primitív függvényének nevezzük, ha F deriválható I-n és $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Megjegyzés: Ha F primitív függvénye f-nek, akkor $F + c$ is, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Ugyanis $(F + c)' = F' = f$.

Definíció 2 ***(Határozatlan integrál)***
Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek van primitív függvénye. Az f függvény primitív függvényeinek halmazát f határozatlan integráljának nevezzük. Jelölés:

$$\int f(x)dx \quad \textit{vagy} \quad \int f$$

Alapintegrálok (táblázatból összegyűjthető).

Definíció 3 ***(Darboux-tulajdonság)***
Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény Darboux-tulajdonságú, ha két felvett függvényérték között minden közbeeső értéket is felvesz.

Tétel 1 ***(Primitív függvény létezésének szükséges feltétele)***
Ha $f : I \to \mathbb{R}$ és f-nek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú.

Tétel 2 ***(Primitív függvény létezésének elégséges feltétele)***
Bármely intervallumon folytonos függvénynek van primitív függvénye.

Műveletek primitív függvényekkel

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f$$

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

Integrálási módszerek

1. Parciális integrálás
   $\int f'g = fg - \int fg'$
2. Helyettesítés
   $\int f(x)dx$ helyett $\int f(g(t))g'(t)dt$ integrálása, ha $x = g(t)$
3. Racionális törtfüggvények parciális törtekre bontása

Határozott integrál

Definíció 4 ***(Intervallum felosztása)***
Legyen $I = [a, b]$. A $\gamma := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$-t az I intervallum egy felosztásának nevezzük, ha

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Az I intervallum összes felbontásának halmazát jelölje $\mathcal{F}(I)$.

Definíció 5 *(Alsó és felső közelítő összeg)*
Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény és $\gamma := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ az I intervallum egy felosztása.

$$m_i := inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$M_i := sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$s(f,\gamma) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i$$

$$S(f,\gamma) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i$$

Az $s(f,\gamma)$-t ill. az $S(f,\gamma)$-t az f γ felosztáshoz tartozó alsó ill. felső közelítő összegének nevezzük.

Definíció 6 *(Darboux és Riemann integrál)*
Az

$$I_*(f) := sup\{s(f,\gamma) : \gamma \in \mathcal{F}(I)\}$$

számot az f Darboux féle alsó integráljának nevezzük.
Az

$$I^*(f) := inf\{S(f,\gamma) : \gamma \in \mathcal{F}(I)\}$$

számot az f Darboux féle felső integráljának nevezzük.
Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény (Riemann) integrálható, ha $I_*(f) = I^*(f)$. Az $I_*(f) = I^*(f)$ számot az f függvény (Riemann) integráljának nevezzük. Jelölés:

$$I(f) \quad vagy \int_a^b f \quad vagy \int_a^b f(x)dx$$

Az $[a,b]$-n (Riemann) integrálható függvények halmazát $\mathcal{R}[a,b]$-vel jelöljük.

Az $[a,b]$-n pozitív értékű f függvény esetén az integrál a görbe alatti területet adja meg:

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

Műveletek integrállal

$$\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$$

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Tétel 3 *(Intervallum szerinti additivitás)*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Tétel 4 *(Folytonos függvény integrálhatósága)*
Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor integrálható.

Tétel 5 *(Newton-Leibniz formula, azaz a határozott integrál is a primitív függvény kapcsolata)*
Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény integrálható és f-nek létezik F primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Integrálszámítás alkalmazásai

Síkidomok területe
Ha egy síkidom definiálható a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

ponthalmazként, ahol $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, akkor a síkidom területe

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

Példa: Kör területének kiszámítása: $f : [0, R] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$T = 4\int_0^R f(x)dx = R^2\pi$$

Függvénygrafikon, mint görbe ívhossza
Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deriválható függvény és f' folytonos, akkor grafikonjának ívhossza

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Forgástest térfogata
Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos (pozitív értékű) függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Forgástest felszíne
Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható (pozitív értékű) függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest palástjának felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Improprius integrál

Ha az integrálás során vagy az intervallum vagy a függvény nem korlátos, akkor beszélhetünk improprius integrálról.

Definíció 7 ***(Improprius integrál, ha az intervallum nem korlátos)***

$$\int_a^\infty f(t)dt := \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$$

ha ez a határérték létezik.

Definíció 8 ***(Improprius integrál, ha az függvény nem korlátos)***
Ha $\lim_{x\to b-} f = \infty$, *akkor*

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$$

ha ez a határérték létezik.