Numerikus sorok, hatványsorok

Sorok

Definíció 1 ***(Végtelen sor)***
Az (a_n) sorozatból képzett $a_1 + a_2 + \dots$ végtelen összeget (végtelen) sornak nevezzük. Jelölése:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad vagy \quad \sum a_i$$

A sor első n tagjának összegéből képzett

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

sorozatot a részletösszegek sorozatának nevezzük. Ha s_n konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a sor konvergens és összege az s_n határértéke, azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Ha s_n divergens, akkor azt mondjuk, hogy a sor divergens.

Példa: (Mértani sor) Ha $|q| < 1$, akkor $\sum q_n$ konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Példa: (Harmonikus sor) A $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens.
Néhány nevezetes sor és összege:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Tétel 1 ***(Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra)***
Az $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N küszöbindex, hogy $\forall n \geq m \geq N$ esetén $|a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon$.

Tétel 2 *Az $\sum a_n$ sor konvergens, akkor $a_n \to 0$.*

Definíció 2 ***(Abszolút konvergencia)***
Az $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

Tétel 3 ***(Majoráns és minoráns kritérium)***
Ha $\sum b_n$ konvergens és egy küszöbindextől kezdve $a_n \leq b_n$, akkor $\sum a_n$ is konvergens.
Ha $\sum a_n$ divergens és egy küszöbindextől kezdve $a_n \leq b_n$, akkor $\sum b_n$ is divergens.

Tétel 4 ***(Hányadoskritérium)***
Ha $\exists \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = A < 1$ (és $a_n \neq 0$ legalább egy küszöbindex felett), akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens. $A > 1$ esetén divergens, $A = 1$ esetén más vizsgálat szükséges.

Tétel 5 ***(Gyökkritérium)***
Ha $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens. $A > 1$ esetén divergens, $A = 1$ esetén más vizsgálat szükséges.

Hatványsorok

Definíció 3 ***(Hatványsor)***
Az $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *függvénysort* x_0 *körüli hatványsornak nevezzük.*

Definíció 4 ***(Taylor sor)***
Legyen $f : I \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}^{\infty}(I), x_0 \in I$*. Ekkor a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

hatványsort az f *függvény* x_0 *körüli Taylor sorának nevezzük. Ha* $x_0 = 0$*, akkor a Taylor sort Maclaurin sornak is nevezik.*

Nevezetes hatványsorok

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

Definíció 5 ***(Konvergenciasugár)***
Azt az R *nemnegatív számot a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük, ha* $|x - x_0| < R$ *esetén a hatványsor konvergens.*

Tétel 6 ***(A konvergenciasugár meghatározása)***
Legyen $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \textit{ha } \alpha \neq 0, \infty \\ \infty & \textit{ha } \alpha = 0 \\ 0 & \textit{ha } \alpha = \infty \end{cases}$$

Tétel 7 ***(Cauchy-Hadamard tétel)***
Ha $|x - x_0| < R$*, akkor a hatványsor abszolút konvergens.*
Ha $|x - x_0| > R$*, akkor a hatványsor divergens.*
Ha $|x - x_0| = R$*, akkor egyéb vizsgálatra van szükség.*