Kombinatorikai alapfogalmak

Kombinatorika

Definíció 1 *(**Permutáció**) Az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek egy sorrendjét a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egy (ismétlés nélküli) permutációjának nevezzük. Az n különböző elem (ismétlés nélküli) permutációinak száma:*

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$$

Ha az elemek között egyenlők is lehetnek, akkor az n elem egy sorrendjét az elemek egy ismétléses permutációjának nevezzük. Ha adott n számú elem között pontosan r féle különböző van és ezek száma rendre $k_1, k_2, \ldots, k_r$, akkor az ismétléses permutációk száma:

$$P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_r)} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$

Definíció 2 *(**Variáció**) Az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képzett k elemű sorozatokat az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek k-adosztályú ismétlés nélküli variációinak nevezzük, ha bennük minden elem legfeljebb egyszer fordul elő. Az n elem k-adosztályú ismétlés nélküli variációinak száma:*

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ha ezekben a sorozatokban egy elem többször is előfordulhat, akkor azokat az n elem k-adosztályú ismétléses variációinak nevezzük. Az n elem k-adosztályú ismétléses variációinak száma:

$$V_n^{k,i} = n^k$$

Definíció 3 *(**Kombináció**) Az egymástól különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekből képzett k elemű halmazokat az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. Az n elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma:*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ha egy elemet többször is választhatunk (azaz a k elemű elemcsoport nem halmaz), akkor azokat az n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak nevezzük. Az n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$$

Tétel 1 *(**Szita formula**)*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

Két halmaz esetén:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Tétel 2 *(**Binomiális tétel**)*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Tétel 3 *(**Polinomiális tétel, a Binomiális tétel általánosítása**)*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_k=n} \frac{n!}{s_1!s_2!\ldots s_k!} a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_k^{s_k}$$

Gráfok

Definíció 4 *(**Irányított és irányítatlan gráf**) Adott egy véges, nem üres V halmaz. Legyen E a V elemeiből képzett rendezetlen párok halmaza. Ekkor a $G = (V, E)$ rendezett párt írányítatlan gráfnak nevezik. V elemei a gráf csúcsai, E elemei a gráf élei.*
Adott egy véges, nem üres V halmaz. Legyen E a V elemeiből képzett rendezett párok halmaza, azaz $E \subseteq V \times V$. Ekkor a $G = (V, E)$ rendezett párt írányított gráfnak nevezik. V elemei a gráf csúcsai, E elemei a gráf élei.
Egy csúcsból induló élek számát a csúcs fokszámának nevezzük. Irányított gráfoknál külön beszélhetünk befokról (csúcsba bejövő élek száma) és kifokról (csúcsból kimenő élek száma).
Hurokél: Kezdőpontja és végpontja megegyezik.

Definíció 5 *Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. A gráf egymáshoz csatlakozó éleiből képzett $e_1, e_2, \ldots, e_n$ élsorozatot a gráfon értelmezett útnak nevezik. Az n pozitív egész szám, az út hossza. Ha $e = (u, v) \in E$, akkor u az e él kezdőpontja, v a végpontja. Az e_i és e_{i+1} egymáshoz csatlakozó élek, ha e_i végpontja kezdőpontja e_{i+1}-nek. Hasonlóan értelmezhető az út irányítatlan gráfokon is, de ott az éleknek nincs kitüntetett kezdőpontja és végpontja, szerepük felcserélhető.*

Definíció 6 *Legyen $G = (V, E)$ egy irányított (vagy irányítatlan) gráf. Ha $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a gráfon értelmezett út és e_n végpontja megegyezik e_1 kezdőpontjával, akkor az utat körnek nevezik. Ha a gráfban nincs kör, akkor azt körmentes gráfnak nevezik.*

Definíció 7 ***Összefüggő gráf**: Bármely két ponja között van út.*

Definíció 8 ***Fa**: Minimális összefüggő gráf.*

Definíció 9 ***Szomszédsági mátrix**:* $a_{ij} := \begin{cases} 1 & ha \quad (i,j) \in E \\ 0 & ha \quad (i,j) \notin E \end{cases}$

Definíció 10 ***Euler vonal**: Olyan élsorozat, amely pontosan egyszer tartalmazza a gráf minden élét.*

Definíció 11 ***Euler kör**: Olyan Euler vonal, melynek kezdő és végponja megegyezik.*

Tétel 4 *Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van Euler kör, ha minden csúcsának a fokszáma páros.*

Definíció 12 ***Hamilton út**: Olyan út, amely a gráf összes csúcsát pontosan egyszer érinti.*

Definíció 13 ***Hamilton kör**: Zárt Hamilton út.*

Tétel 5 *Ha egy n ($n \geq 3$) csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráfban van Hamilton kör.*

Komplex számok

Alapok

Imaginárius (képzetes) egység: i, melyre $i^2 = -1$
Komplex számok: $\mathbb{C} = \{a + bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ (Azaz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-rel ekvivalens halmaz)
$z = a + bi$ (algebrai vagy kanonikus alak)
Valós rész: $Re(z) = a$
Képzetes rész: $Im(z) = b$
Konjugált: $\bar{z} = a - bi$
Abszolútérték: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
Trigonometrikus alak : $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$
Exponenciális alak : $z = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$
A komplex számokat a Descartes-féle síkbeli koordinátarendszerben lehet ábrázolni kétdimenziós vektorként. Az x koordináta a komplex szám valós része, az y koordináta a komplex szám képzetes része. A $|z|$ a z komplex számot ábrázoló vektor hossza, φ pedig a vektor forgásszöge az x tengely pozitív irányához képest.

Műveletek komplex számokkal

$z_1 = a_1 + b_1 i = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) = |z_1| \cdot e^{i\cdot\varphi_1}$
$z_2 = a_2 + b_2 i = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) = |z_2| \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ (összeadáshoz a kanonikus alakot érdemes használni)
$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = |z_1||z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1||z_2| \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$
$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)) = |z|^n \cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$

Gyökvonás komplex számokból

Minden $z \neq 0$ komplex számnak pontosan n darab különböző n-edik gyöke van. (Az $x^n = z$ egyenletnek pontosan n különböző megoldása van a komplex számok halmazán.) $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\cdot\varphi}$
Ekkor z komplex szám n-edik gyökei az

$$u_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

komplex számok. Ezek a komplex számsíkon egy origóközzéppontú szabályos n-szög csúcsait határozzák meg.
Speciális eset: ha $z = 1$, akkor komplex n-edik *egységgyökök*ről beszélünk:

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\cdot\frac{2k\pi}{n}}, \quad \omega_k^n = 1, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

Az n-edik egységgyökök az origó középpontú, egységsugarú körön helyezkednek el szabályos n-szöget alkotva. Vegyük észre, hogy $\omega_1^k = \omega_k$, azaz ω_1 hatványai kiadják az összes n-edik egységgyököt. Azokat az n-edik egységgyököket, melyek hatványaiként az összes n-edik egységgyök előállítható *primitív* n-edik egységgyököknek nevezzük.