Mátrixok sajátértékeinek meghatározása közelítő eljárásokkal

Hatványmódszer a legnagyobb abszolútértékű sajátérték meghatározására

Tegyük fel, hogy létezik az A sajátvektoraiból álló bázis $\mathbb{C}^n$-ben (azaz A egyszerű struktúrájú). Ekkor induljunk ki egy

$$\underline{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$$

vektorból, ahol $\underline{v}_i$-k az A sajátvektorai. Ezután legyen

$$\underline{x}_k := A\underline{x}_{k-1} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Az $\underline{x}_k$ sorozatban nagy k-k esetén a legnagyobb abszolútértékű sajátértékhez tartozó sajátvektor által meghatározott tag válik meghatározóvá a sajátértékek hatványozódása miatt. Legyen pl. λ_1 a legnagyobb abszolútértékű sajátérték. Ha $\underline{y}$ egy tetszőleges, $\underline{v_1}$-re nem merőleges vektor. Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\langle \underline{y}, \underline{x}_{k+1} \rangle}{\langle \underline{y}, \underline{x}_k \rangle} = \lambda_1$$

ahol $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok skaláris szorzatát jelöli. Ekkor a $\underline{v}_1$ sajátvektor

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\underline{x}_k}{||\underline{x}_k||} = \underline{v}_1$$

alapján számolható.

Jacobi módszere szimmetrikus valós mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározására

Ez a módszer közvetlenül számolja egy A szimmetrikus mátrix összes sajátértékét (és sajátvektorát) iterációs eljárással. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ekkor A minden sajátértéke valós és létezik olyan Q ortogonális mátrix, amellyel A diagonálisra transzformálható:

$$Q^T \cdot A \cdot Q = D$$

ahol D diagonális mátrix és diagonális elemei éppen A sajátvektorai.
Olyan ortogonális mátrixokból álló Ω_k sorozatot konstruálunk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \Omega_1 \cdot \cdots \cdot \Omega_k = Q$$

Legyen

$$A_0 := A$$

$$A_k := \Omega_k^T \cdot A_{k-1} \cdot \Omega_k = \Omega_k^T \cdot \ldots \cdot \Omega_1^T \cdot A_0 \cdot \Omega_1 \cdot \ldots \cdot \Omega_k \quad k = 1, 2, \ldots$$

Szimmetrikus, tridiagonális mátrix sajátértékei

Legyen T olyan $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, ahol a főátlón és közvetlen alatta és felette lévő mellékátlón kívül minden elem csupa nulla. (Szimmetrikus, tridiagonális mátrix)
Mivet T szimmetrikus, ezért sajátértékei valósak. A $K(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökeinek meghatározására felhasználjuk a Newton módszert, anélkül, hogy ismernénk a $K(\lambda)$ együtthatóit. Newton módszerrel $K(\lambda)$ gyöke:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{K(\lambda_k)}{K'(\lambda_k)}$$

Rangszám csökkentés módszere

Egy $n\times n$-es A mátrix egy sajátértékének és sajátvektorának ismeretében a következő sajátérték már egy $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix sajátértékének és sajátvektorainak a meghatározására vezethető vissza. Az eljárást folytatva a következő sajátérték meghatározása mindíg 1-gyel kisebb rendű mátrix sajátértékének meghatározását jelenti, ami mindíg egy egyszerűbb feladat.